Курчатов-2020. Математика
Первый тур (условия и решения)

Содержание

6-7 классы 2

8-9 классы 11

10-11 классы 20

6-7 классы

Задача 1/1. В каждой клетке прямоугольной таблицы 5×9 написано целое число, причём числа в двух соседних по стороне клетках отличаются ровно на 1. В таблице встречаются числа 5 и -7 ровно по одному разу. Сколько раз встречается число 0?

Ответ: 5.

Решение. Рассмотрим кратчайший путь по клеткам из клетки с числом -7 в клетку с числом 5. Заметим, что на этом пути встречаются все целые числа от -7 до 5. Следовательно, этот путь состоит хотя бы из 13 клеток. Но если кратчайший путь из клетки в клетку в таблице 5×9 имеет длину 13, то эти клетки находятся в противоположных углах таблицы.

После этого замечания расстановка чисел в таблице однозначно восстанавливается:

-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

$\square$

Задача 1/2. В каждой клетке прямоугольной таблицы 6×7 написано целое число, причём числа в двух соседних по стороне клетках отличаются ровно на 1. В таблице встречаются числа 6 и -5 ровно по одному разу. Сколько раз встречается число 0?

Ответ: 6.

Решение. Рассмотрим кратчайший путь по клеткам из клетки с числом -5 в клетку с числом 6. Заметим, что на этом пути встречаются все целые числа от -5 до 6. Следовательно, этот путь состоит хотя бы из 12 клеток. Но если кратчайший путь из клетки в клетку в таблице 6×7 имеет длину 12, то эти клетки находятся в противоположных углах таблицы.

После этого замечания расстановка чисел в таблице однозначно восстанавливается:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-4	-3	-2	-1	0	1	2
-3	-2	-1	0	1	2	3
-2	-1	0	1	2	3	4
-1	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6

□

Задача 1/3. В каждой клетке прямоугольной таблицы 8×10 написано целое число, причём числа в двух соседних по стороне клетках отличаются ровно на 1. В таблице встречаются числа 7 и -9 ровно по одному разу. Сколько раз встречается число 0?

Ответ: 8.

Решение. Рассмотрим кратчайший путь по клеткам из клетки с числом -9 в клетку с числом 7. Заметим, что на этом пути встречаются все целые числа от -9 до 7. Следовательно, этот путь состоит хотя бы из 17 клеток. Но если кратчайший путь из клетки в клетку в таблице 8×10 имеет длину 17, то эти клетки находятся в противоположных углах таблицы.

После этого замечания расстановка чисел в таблице однозначно восстанавливается:

-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

□

Задача 2/1. Маша задумала три различные ненулевые цифры — A, B и C. Оказалось, что среднее арифметическое чисел $\overline{ABC}$, $\overline{BC}$ и C равно 123. Найдите сумму цифр, загаданных Машей.

Запись $\overline{XYZ}$ означает трёхзначное число, составленное из цифр X, Y и Z. Среднее арифметическое трёх чисел a, b, c вычисляется по формуле $\frac{a+b+c}{3}$.

Ответ: 13.

Решение. Заметим, что

$$\overline{ABC} + \overline{BC} + C = (100A + 10B + C) + (10B + C) + C = 100A + 20B + 3C\,.$$

По условию задачи это выражение в три раза больше, чем 123. Получаем уравнение:

$$100A + 20B + 3C = 369\,.$$

Заметим, что число $3C$ заканчивается цифрой 9, только если $C = 3$. Получается

$$100A + 20B + 9 = 369\,;$$
$$10A + 2B = 36\,.$$

Остаётся рассмотреть два случая: $B = 3$ и $B = 8$. В первом случае $B = C$, что противоречит условию. Во втором случае $A = 2$. □

Задача 2/2. Маша задумала три различные ненулевые цифры — A, B и C. Оказалось, что среднее арифметическое чисел $\overline{ABC}$, $\overline{BC}$ и C равно 342. Найдите сумму цифр, загаданных Машей.

Запись $\overline{XYZ}$ означает трёхзначное число, составленное из цифр X, Y и Z. Среднее арифметическое трёх чисел a, b, c вычисляется по формуле $\frac{a+b+c}{3}$.

Ответ: 17.

Решение. Заметим, что

$$\overline{ABC} + \overline{BC} + C = (100A + 10B + C) + (10B + C) + C = 100A + 20B + 3C\,.$$

По условию задачи это выражение в три раза больше, чем 342. Получаем уравнение:

$$100A + 20B + 3C = 1026\,.$$

Заметим, что число $3C$ заканчивается цифрой 6, только если $C = 2$. Получается

$$100A + 20B + 6 = 1026\,;$$
$$10A + 2B = 102\,.$$

Остаётся рассмотреть два случая: $B = 1$ и $B = 6$. В первом случае $A = 10$, что противоречит условию. Во втором случае $A = 9$. □

Задача 2/3. Маша задумала три различные ненулевые цифры — A, B и C. Оказалось, что среднее арифметическое чисел $\overline{ABC}$, $\overline{BC}$ и C равно 182. Найдите сумму цифр, загаданных Машей.

Запись $\overline{XYZ}$ означает трёхзначное число, составленное из цифр X, Y и Z. Среднее арифметическое трёх чисел a, b, c вычисляется по формуле $\frac{a+b+c}{3}$.

Ответ: 13.

Решение. Заметим, что

$$\overline{ABC} + \overline{BC} + C = (100A + 10B + C) + (10B + C) + C = 100A + 20B + 3C\,.$$

По условию задачи это выражение в три раза больше, чем 182. Получаем уравнение:

$$100A + 20B + 3C = 546\,.$$

Заметим, что число $3C$ заканчивается цифрой 6, только если $C = 2$. Получается, что

$$100A + 20B + 6 = 546\,;$$
$$10A + 2B = 54\,.$$

Остаётся рассмотреть два случая: $B = 2$ и $B = 7$. В первом случае $B = C$, что противоречит условию. Во втором случае $A = 4$. □

Задача 3/1. Андрей написал на трёх карточках числа 20, 24 и 35 и перевернул их чистыми сторонами вверх. Затем Лёня написал на каждой карточке по простому числу. Для каждой карточки они нашли сумму написанных на ней чисел. Оказалось, что эти суммы одинаковые. Чему равняется сумма всех шести чисел, написанных на карточках?

Ответ: 111.

Решение. Так как среди чисел 20, 24 и 35 есть как чётные, так и нечётные, то среди простых должны быть как чётные, так и нечётные. Получается, среди простых обязательно встретится двойка, но это наименьшее простое число, и она может быть написана только на карточке с наибольшим числом, то есть 35. Тогда сумма чисел на каждой карточке равна 37, а общая сумма чисел равна 111. □

Задача 3/2. Андрей написал на трёх карточках числа 20, 32 и 41 и перевернул их чистыми сторонами вверх. Затем Лёня написал на каждой карточке по простому числу. Для каждой карточки они нашли сумму написанных на ней чисел. Оказалось, что эти суммы одинаковые. Чему равняется сумма всех шести чисел, написанных на карточках?

Ответ: 129.

Решение. Так как среди чисел 20, 32 и 41 есть как чётные, так и нечётные, то среди простых должны быть как чётные, так и нечётные. Получается, среди простых обязательно встретится двойка, но это наименьшее простое число, и она может быть написана только на карточке с наибольшим числом, то есть 41. Тогда сумма чисел на каждой карточке равна 43, а общая сумма чисел равна 129. □

Задача 3/3. Андрей написал на трёх карточках числа 20, 34 и 49 и перевернул их чистыми сторонами вверх. Затем Лёня написал на каждой карточке по простому числу. Для каждой карточки они нашли сумму написанных на ней чисел. Оказалось, что эти суммы одинаковые. Чему равняется сумма всех шести чисел, написанных на карточках?

Ответ: 153.

Решение. Так как среди чисел 20, 34 и 49 есть как чётные, так и нечётные, то среди простых должны быть как чётные, так и нечётные. Получается, среди простых обязательно встретится двойка, но это наименьшее простое число, и она может быть написана только на карточке с наибольшим числом, то есть 49. Тогда сумма чисел на каждой карточке равна 51, а общая сумма чисел равна 153. □

Задача 4/1. Два марафонца бегают между посёлками А и Б. Они стартуют одновременно. Первый начинает из посёлка А и бежит в посёлок Б, второй начинает из Б и бежит в А. Каждый раз, когда марафонец добегает до посёлка, он сразу же разворачивается и бежит обратно. Известно, что первый марафонец пробегает расстояние от А до Б за 20 минут, а второй — за 15 минут. Через сколько минут после старта один из марафонцев впервые поравняется с другим, догнав его (возможно, в одном из посёлков)?

Ответ: 60.

Решение. Пусть расстояние между посёлками равно S. Тогда скорости марафонцев равны $\frac{S}{20}$ и $\frac{S}{15}$ соответственно.

Марафонец, имеющий скорость $\frac{S}{15}$, быстрее, поэтому именно он догонит другого. К тому моменту он пробежит расстояние на S большее, чем пробежит другой марафонец. При этом их скорость сближения равна $\frac{S}{15} - \frac{S}{20}$.

Получается, искомое время можно найти следующим образом

$$S : \left(\frac{S}{15} - \frac{S}{20}\right) = S : \frac{S}{60} = 60\,.$$ □

Задача 4/2. Два марафонца бегают между посёлками А и Б. Они стартуют одновременно. Первый начинает из посёлка А и бежит в посёлок Б, второй начинает из Б и бежит в А. Каждый раз, когда марафонец добегает до посёлка, он сразу же разворачивается и бежит обратно. Известно, что первый марафонец пробегает расстояние от А до Б за 20 минут, а второй — за 24 минуты. Через сколько минут после старта один из марафонцев впервые поравняется с другим, догнав его (возможно, в одном из посёлков)?

Ответ: 120.

Решение. Пусть расстояние между посёлками равно S. Тогда скорости марафонцев равны $\frac{S}{20}$ и $\frac{S}{24}$ соответственно.

Марафонец, имеющий скорость $\frac{S}{20}$, быстрее, поэтому именно он догонит другого. К тому моменту он пробежит расстояние на S большее, чем пробежит другой марафонец. При этом их скорость сближения равна $\frac{S}{20} - \frac{S}{24}$.

Получается, искомое время можно найти следующим образом

$$S : \left(\frac{S}{20} - \frac{S}{24}\right) = S : \frac{S}{120} = 120\,. \qquad \square$$

Задача 4/3. Два марафонца бегают между посёлками А и Б. Они стартуют одновременно. Первый начинает из посёлка А и бежит в посёлок Б, второй начинает из Б и бежит в А. Каждый раз, когда марафонец добегает до посёлка, он сразу же разворачивается и бежит обратно. Известно, что первый марафонец пробегает расстояние от А до Б за 20 минут, а второй — за 25 минут. Через сколько минут после старта один из марафонцев впервые поравняется с другим, догнав его (возможно, в одном из посёлков)?

Ответ: 100.

Решение. Пусть расстояние между посёлками равно S. Тогда скорости марафонцев равны $\frac{S}{20}$ и $\frac{S}{25}$ соответственно.

Марафонец, имеющий скорость $\frac{S}{20}$, быстрее, поэтому именно он догонит другого. К тому моменту он пробежит расстояние на S большее, чем пробежит другой марафонец. При этом их скорость сближения равна $\frac{S}{20} - \frac{S}{25}$.

Получается, искомое время можно найти следующим образом

$$S : \left(\frac{S}{20} - \frac{S}{25}\right) = S : \frac{S}{100} = 100\,. \qquad \square$$

Задача 5/1. Однажды Андрей, Боря и Вася гуляли со своей мамой и увидели автомат по продаже жевательных резинок, в котором содержатся резинки трёх цветов: красного, желтого и зеленого. Любая резинка стоит 10 рублей. Ребята попросили маму, чтобы она каждому из них купила по резинке, и чтобы они были одного цвета. Мама опускала монеты в автомат, пока не смогла исполнить желание детей. Затем ещё три дня подряд мама исполняла такое же желание своих детей. Какую сумму денег необходимо было иметь маме, чтобы гарантированно исполнять желание детей четыре дня подряд? Невыданные детям жевательные резинки оставались у мамы до следующих покупок.

Ответ: 160.

Решение. Заметим, что в последний день у мамы останется не более 4 жвачек (не более чем по две штуки не более чем двух видов жвачек). За прошедшие четыре дня она раздаст ровно 12 жвачек. Итого, она потратит не более 160 рублей.

Приведём пример того, как мама потратит ровно 160 рублей. В первые три дня она вытаскивает по три жвачки красного цвета, а в последний день она сначала вытягивает две красные, затем две жёлтые и в конце три зелёные. □

Задача 5/2. Однажды Андрей, Боря и Вася гуляли со своей мамой и увидели автомат по продаже жевательных резинок, в котором содержатся резинки трёх цветов: красного, желтого и зеленого. Любая резинка стоит 10 рублей. Ребята попросили маму, чтобы она каждому из них купила по резинке, и чтобы они были одного цвета. Мама опускала монеты в автомат, пока не смогла исполнить желание детей. Затем ещё четыре дня подряд мама исполняла такое же желание своих детей. Какую сумму денег необходимо было иметь маме, чтобы гарантированно исполнять желание детей пять дней подряд? Невыданные детям жевательные резинки оставались у мамы до следующих покупок.

Ответ: 190.

Решение. Заметим, что в последний день у мамы останется не более 4 жвачек (не более чем по две штуки не более чем двух видов жвачек). За прошедшие пять дней она раздаст ровно 15 жвачек. Итого, она потратит не более 190 рублей.

Приведём пример того, как мама потратит ровно 190 рублей. В первые четыре дня она вытаскивает по три жвачки красного цвета, а в последний день она сначала вытягивает две красные, затем две жёлтые и в конце три зелёные. □

Задача 5/3. Однажды Андрей, Боря и Вася гуляли со своей мамой и увидели автомат по продаже жевательных резинок, в котором содержатся резинки трёх цветов: красного, желтого и зеленого. Любая резинка стоит 10 рублей. Ребята попросили маму, чтобы она каждому из них купила по резинке, и чтобы они были одного цвета. Мама опускала монеты в автомат, пока не смогла исполнить желание детей. Затем ещё пять дней подряд мама исполняла такое же желание своих детей. Какую сумму денег необходимо было иметь маме, чтобы гарантированно исполнять желание детей шесть дней подряд? Невыданные детям жевательные резинки оставались у мамы до следующих покупок.

Ответ: 220.

Решение. Заметим, что в последний день у мамы останется не более 4 жвачек (не более чем по две штуки не более чем двух видов жвачек). За прошедшие шесть дней она раздаст ровно 18 жвачек. Итого, она потратит не более 220 рублей.

Приведём пример того, как мама потратит ровно 220 рублей. В первые пять дней она вытаскивает по три жвачки красного цвета, а в последний день она сначала вытягивает две красные, затем две жёлтые и в конце три зелёные. □

Задача 6/1. У Лёши есть сто карточек, на которых написаны числа 100, 101, 102, ..., 199. В первый день он выложил их в ряд в порядке возрастания. А во второй день он переложил их так, что любые два соседних числа отличаются ровно одной цифрой, и их разность равна либо 1, либо 10. Какое наибольшее количество карточек могло остаться на своих местах?

Ответ: 50.

Решение. Сначала приведём пример, в котором 51 карточек осталось на своих местах. Жирным выделены карточки, оставшиеся на своих местах.

$$\mathbf{100}, \mathbf{101}, \ldots, \mathbf{109}, 119, 118, \ldots, 110, \mathbf{120}, \mathbf{121}, \ldots, \mathbf{129}, 139, 138, \ldots$$
$$\ldots, 170, \mathbf{180}, \mathbf{181}, \ldots, \mathbf{189}, 199, 198, \ldots, 190$$

(десятки чисел, начинающихся на 10, 12, 14, 16, 18, остались на месте, а остальные десятки «перевернулись»).

Теперь докажем, что больше 50 карточек не могло остаться на своих местах. Заметим, что после перестановки чётность сумм цифр на карточках чередуется, то есть она либо совпадает у всех карточек с чётностью номеров их мест, либо нет. В первоначальной же расстановке чётность сумм цифр совпадала с чётностью номеров их мест ровно в половине случаев. Таким образом, хотя бы половина карточек изменили свои места. □

Задача 6/2. У Лёши есть восемьдесят карточек, на которых написаны числа 200, 201, 202, ..., 279. В первый день он выложил их в ряд в порядке возрастания. А во второй день он переложил их так, что любые два соседних числа отличаются ровно одной цифрой, и их разность равна либо 1, либо 10. Какое наибольшее количество карточек могло остаться на своих местах?

Ответ: 40.

Решение. Сначала приведём пример, в котором 40 карточек осталось на своих местах. Жирным выделены карточки, оставшиеся на своих местах.

$$\mathbf{200}, \mathbf{201}, \ldots, \mathbf{209}, 219, 218, \ldots, 210, \mathbf{220}, \mathbf{221}, \ldots, \mathbf{229}, 239, 238, \ldots$$
$$\ldots, 250, \mathbf{260}, \mathbf{261}, \ldots, \mathbf{269}, 279, 278, \ldots, 270$$

(десятки чисел, начинающихся на 20, 22, 24, 26, остались на месте, а остальные десятки «перевернулись»).

Теперь докажем, что больше 40 карточек не могло остаться на своих местах. Заметим, что после перестановки чётность сумм цифр на карточках чередуется, то есть она либо совпадает у всех карточек с чётностью номеров их мест, либо нет. В первоначальной же расстановке чётность сумм цифр совпадала с чётностью номеров их мест ровно в половине случаев. Таким образом, хотя бы половина карточек изменили свои места. □

8-9 классы

Задача 1/1. Квадратный остров размерами 80×80 метров разделён на 16 участков земли, каждый из которых имеет размеры либо 20×20 метров, либо 10×40 метров. Все участки разделены заборами суммарной длины 540 метров. На берегах острова заборов нет. Сколько участков земли размером 10×40 метров есть на острове?

Ответ: 6.

Решение. Пусть x — количество участков земли размером 10×40 метров. Тогда количество участков земли размером 20×20 метров равно $16 - x$.

Суммарный периметр всех участков земли равен удвоенной длине всех заборов плюс периметр острова. Составим уравнение

$$\begin{gathered} 100x + 80(16 - x) = 2 \cdot 540 + 320\,; \\ 20x + 1280 = 1400\,; \\ x = 6\,. \end{gathered}$$

□

Задача 1/2. Квадратный остров размерами 80×80 метров разделён на 16 участков земли, каждый из которых имеет размеры либо 20×20 метров, либо 10×40 метров. Все участки разделены заборами суммарной длины 520 метров. На берегах острова заборов нет. Сколько участков земли размером 10×40 метров есть на острове?

Ответ: 4.

Решение. Пусть x — количество участков земли размером 10×40 метров. Тогда количество участков земли размером 20×20 метров равно $16 - x$.

Суммарный периметр всех участков земли равен удвоенной длине всех заборов плюс периметр острова. Составим уравнение

$$\begin{gathered} 100x + 80(16 - x) = 2 \cdot 520 + 320\,; \\ 20x + 1280 = 1360\,; \\ x = 4\,. \end{gathered}$$

□

Задача 1/3. Квадратный остров размерами 80×80 метров разделён на 16 участков земли, каждый из которых имеет размеры либо 20×20 метров, либо 10×40 метров. Все участки разделены заборами суммарной длины 560 метров. На берегах острова заборов нет. Сколько участков земли размером 10×40 метров есть на острове?

Ответ: 8.

Решение. Пусть x — количество участков земли размером 10×40 метров. Тогда количество участков земли размером 20×20 метров равно $16 - x$.

Суммарный периметр всех участков земли равен удвоенной длине всех заборов плюс периметр острова. Составим уравнение

$$\begin{gathered} 100x + 80(16 - x) = 2 \cdot 560 + 320\,; \\ 20x + 1280 = 1440\,; \\ x = 8\,. \end{gathered}$$

□

Задача 2/1. Юра выписал в ряд все натуральные числа от 1 до 1000000. Затем вычеркнул все числа, которые делятся либо на 3, либо на 7. Какое число будет двухтысячным по величине среди невычеркнутых чисел?

Ответ: 3499.

Решение. Выпишем все числа от 1 до 21 и подчеркнём все числа, не кратные 3 или 7.

$$\underline{1}\ \ \underline{2}\ \ 3\ \ \underline{4}\ \ \underline{5}\ \ 6\ \ 7\ \ \underline{8}\ \ 9\ \ \underline{10}\ \ \underline{11}\ \ 12\ \ \underline{13}\ \ 14\ \ 15\ \ \underline{16}\ \ \underline{17}\ \ 18\ \ \underline{19}\ \ \underline{20}\ \ 21\,.$$

Нетрудно понять, что среди чисел от 1 до 21 не будут вычеркнуты 12 чисел, среди чисел от 22 до 42 не будут вычеркнуты 12 чисел, среди чисел от 43 до 63 не будут вычеркнуты 12 чисел, ... (каждый из промежутков заканчивается числом, кратным 21).

Число 1992 — ближайшее к 2000, кратное 12. Поэтому если среди чисел от 1 до $(1992 : 12) \cdot 21 = 3486$ вычеркнуть все кратные 3 или 7, то останется 1992 числа. Осталось 8 чисел до 2000.

Среди чисел от 1 до 21 восьмым подчёркнутым числом является 13. Поэтому ответ в задаче: $3486 + 13 = 3499$. □

Задача 2/2. Юра выписал в ряд все натуральные числа от 1 до 1000000. Затем вычеркнул все числа, которые делятся либо на 5, либо на 7. Какое число будет двухтысячным по величине среди невычеркнутых чисел?

Ответ: 2916.

Решение. Выпишем все числа от 1 до 35 и подчеркнём все числа, не кратные 5 или 7.

$$\begin{gathered} \underline{1}\ \ \underline{2}\ \ \underline{3}\ \ \underline{4}\ \ 5\ \ \underline{6}\ \ 7\ \ \underline{8}\ \ \underline{9}\ \ 10\ \ \underline{11}\ \ \underline{12}\ \ \underline{13}\ \ 14\ \ 15\ \ \underline{16}\ \ \underline{17}\ \ \underline{18}\ \ \underline{19} \\ 20\ \ 21\ \ \underline{22}\ \ \underline{23}\ \ \underline{24}\ \ 25\ \ \underline{26}\ \ \underline{27}\ \ 28\ \ \underline{29}\ \ 30\ \ \underline{31}\ \ \underline{32}\ \ \underline{33}\ \ \underline{34}\ \ 35\,. \end{gathered}$$

Нетрудно понять, что среди чисел от 1 до 35 не будут вычеркнуты 24 числа, среди чисел от 36 до 70 не будут вычеркнуты 24 числа, среди чисел от 71 до 105 не будут вычеркнуты 24 числа, ... (каждый из промежутков заканчивается числом, кратным 35).

Число 1992 — ближайшее к 2000, кратное 24. Поэтому если среди чисел от 1 до $(1992 : 24) \cdot 35 = 2905$ вычеркнуть все кратные 5 или 7, то останется 1992 числа. Осталось 8 чисел до 2000.

Среди чисел от 1 до 35 восьмым подчёркнутым числом является 11. Поэтому ответ в задаче: $2905 + 11 = 2916$. □

Задача 2/3. Юра выписал в ряд все натуральные числа от 1 до 1000000. Затем вычеркнул все числа, которые делятся либо на 3, либо на 8. Какое число будет двухтысячным по величине среди невычеркнутых чисел?

Ответ: 3428.

Решение. Выпишем все числа от 1 до 24 и подчеркнём все числа, не кратные 3 или 8.

$$\underline{1}\ \underline{2}\ 3\ \underline{4}\ \underline{5}\ 6\ \underline{7}\ 8\ 9\ \underline{10}\ \underline{11}\ 12\ \underline{13}\ \underline{14}\ 15\ 16\ \underline{17}\ 18\ \underline{19}\ \underline{20}\ 21\ \underline{22}\ \underline{23}\ 24\,.$$

Нетрудно понять, что среди чисел от 1 до 24 не будут вычеркнуты 14 чисел, среди чисел от 25 до 48 не будут вычеркнуты 14 чисел, среди чисел от 49 до 72 не будут вычеркнуты 14 чисел, ... (каждый из промежутков заканчивается числом, кратным 24).

Число 1988 — ближайшее к 2000, кратное 14. Поэтому если среди чисел от 1 до $(1988 : 14) \cdot 24 = 3408$ вычеркнуть все кратные 3 или 8, то останется 1988 числа. Осталось 12 чисел до 2000.

Среди чисел от 1 до 24 двенадцатым подчёркнутым числом является 20. Поэтому ответ в задаче: $3408 + 20 = 3428$. □

Задача 3. Будем называть натуральное число *нечётностепенным,* если все его простые делители входят в его разложение в нечётной степени. Какое наибольшее количество нечётностепенных чисел может идти подряд?

Ответ: 7.

Решение. Заметим, что среди любых восьми подряд идущих натуральных чисел обязательно встретится число, кратное 4, но не кратное 8. Тогда двойка будет входить в его разложение во второй степени.

Пример семи нечётностепенных чисел: 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43. □

Задача 4/1. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 30°$, $\angle DBC = 75°$, $\angle BCA = 45°$. Найдите CD, если известно, что $BA + AD = 14$.

Ответ: 7.

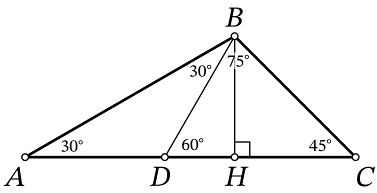


Рис. 1: к решению задачи 4/1

Решение. Из суммы углов треугольника ABC следует, что $\angle ABD = 30°$. Следовательно, $AD = BD$.

Проведём высоту BH в треугольнике ABC (рис. 1). Треугольник BHC — прямоугольный равнобедренный, поэтому $CH = BH$. Треугольники ABH и BDH — прямоугольные с углом $30°$, поэтому в них катеты напротив угла $30°$ в два раза меньше гипотенузы. Получается, что $2BH = AB$, $2HD = BD$.

Тогда

$$CD = CH + HD = BH + HD = \frac{AB}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{AB + AD}{2} = 7\,. \qquad \square$$

Задача 4/2. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 30°$, $\angle DBC = 75°$, $\angle BCA = 45°$. Найдите CD, если известно, что $BA + AD = 16$.

Ответ: 8.

Решение. Из суммы углов треугольника ABC следует, что $\angle ABD = 30°$. Следовательно, $AD = BD$.

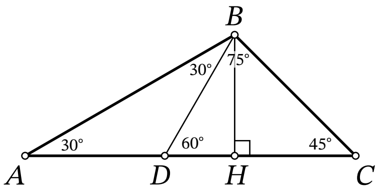


Рис. 2: к решению задачи 4/2

Проведём высоту BH в треугольнике ABC (рис. 2). Треугольник BHC — прямоугольный равнобедренный, поэтому $CH = BH$. Треугольники ABH и BDH — прямоугольные с углом $30°$, поэтому в них катеты напротив угла $30°$ в два раза меньше гипотенузы. Получается, что $2BH = AB$, $2HD = BD$.

Тогда

$$CD = CH + HD = BH + HD = \frac{AB}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{AB + AD}{2} = 8 . \qquad \square$$

Задача 4/3. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 30°$, $\angle DBC = 75°$, $\angle BCA = 45°$. Найдите CD, если известно, что $BA + AD = 18$.

Ответ: 9.

Решение. Из суммы углов треугольника ABC следует, что $\angle ABD = 30°$. Следовательно, $AD = BD$.

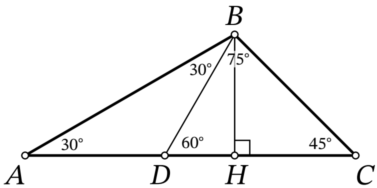


Рис. 3: к решению задачи 4/3

Проведём высоту BH в треугольнике ABC (рис. 3). Треугольник BHC — прямоугольный равнобедренный, поэтому $CH = BH$. Треугольники ABH и BDH — прямоугольные с углом $30°$, поэтому в них катеты напротив угла $30°$ в два раза меньше гипотенузы. Получается, что $2BH = AB$, $2HD = BD$.

Тогда

$$CD = CH + HD = BH + HD = \frac{AB}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{AB + AD}{2} = 9 . \qquad \square$$

Задача 5/1. В ряд лежат 40 фишек: 28 красных и 12 синих. Раз в минуту можно менять две соседние фишки местами. За какое минимальное время можно гарантированно сделать так, чтобы все синие фишки были расположены подряд? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 168.

Решение. Для того чтобы синие фишки стояли подряд, необходимо и достаточно, чтобы все красные фишки стояли с краёв (возможно, все с одного края).

Оценка. Пусть есть строка с произвольной расстановкой синих и красных фишек. Будем перемещать красные фишки к правому или к левому краю так, чтобы правее или левее них уже не было синих фишек. Для этого сначала выберем самую правую и самую левую красную фишку. Для того чтобы одна из них оказалась с краю, требуется не более 6 минут, так как либо слева от самой левой, либо справа от самой правой красной фишки стоит не более чем 6 синих фишек.

Далее возьмём самую правую и самую левую красную фишку из оставшихся 27. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более 6 минут, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более $28 \cdot 6 = 168$ минут.

Пример. Приведём изначальную расстановку такую, что меньшего количества ходов не хватит. Пусть в ряд стоят 6 синих фишек, затем 28 красных, а затем ещё 6 синих. В этом случае для перемещения каждой красной фишки к краю потребуется ровно 6 минут. □

Задача 5/2. В ряд лежат 40 фишек: 26 красных и 14 синих. Раз в минуту можно менять две соседние фишки местами. За какое минимальное время можно гарантированно сделать так, чтобы все синие фишки были расположены подряд? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 182.

Решение. Для того чтобы синие фишки стояли подряд, необходимо и достаточно, чтобы все красные фишки стояли с краёв (возможно, все с одного края).

Оценка. Пусть есть строка с произвольной расстановкой синих и красных фишек. Будем перемещать красные фишки к правому или к левому краю так, чтобы правее или левее них уже не было синих фишек. Для этого сначала выберем самую правую и самую левую красную фишку. Для того чтобы одна из них оказалась с краю, требуется не более 7 минут, так как либо слева от самой левой, либо справа от самой правой красной фишки стоит не более, чем 7 синих фишек.

Далее возьмём самую правую и самую левую красную фишку из оставшихся 25. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более 7 минут, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более $26 \cdot 7 = 182$ минуты.

Пример. Приведём изначальную расстановку такую, что меньшего количества ходов не хватит. Пусть в ряд стоят 7 синих фишек, затем 26 красных, а затем ещё 7 синих. В этом случае для перемещения каждой красной фишки к краю потребуется ровно 7 минут. □

Задача 5/3. В ряд лежат 40 фишек: 24 красных и 16 синих. Раз в минуту можно менять две соседние фишки местами. За какое минимальное время можно гарантированно сделать так, чтобы все синие фишки были расположены подряд? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 192.

Решение. Для того чтобы синие фишки стояли подряд, необходимо и достаточно, чтобы все красные фишки стояли с краёв (возможно, все с одного края).

Оценка. Пусть есть строка с произвольной расстановкой синих и красных фишек. Будем перемещать красные фишки к правому или к левому краю так, чтобы правее или левее них уже не было синих фишек. Для этого сначала выберем самую правую и самую левую красную фишку. Для того чтобы одна из них оказалась с краю, требуется не более 8 минут, так как либо слева от самой левой, либо справа от самой правой красной фишки стоит не более, чем 8 синих фишек.

Далее, возьмём самую правую и самую левую красную фишку из оставшихся 23. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более 8 минут, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более $24 \cdot 8 = 192$ минуты.

Пример. Приведём изначальную расстановку такую, что меньшего количества ходов не хватит. Пусть в ряд стоят 8 синих фишек, затем 24 красных, а затем ещё 8 синих. В этом случае для перемещения каждой красной фишки к краю потребуется ровно 8 минут. □

Задача 6/1. Полина представила число 1234 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, что произведение этих чисел максимально возможное. Известно, что это произведение делится на 3^k, но не делится на 3^{k+1}. Найдите k.

Ответ: 410.

Решение. Пусть 1234 представлено в виде суммы $a_1 + a_2 + \ldots$. Безусловно, если среди слагаемых присутствуют единицы, то произведение не является максимальным (любую единицу можно добавить к другому слагаемому, и произведение увеличится).

Если какое-нибудь $a_i \geqslant 4$, то заменим его на два слагаемых 2 и $a_i - 2$. Нетрудно понять, что $2(a_i - 2) \geqslant a_i$. Сделаем всевозможные такие замены, при этом общее произведение не уменьшится.

Наше произведение будет иметь вид $2^n 3^k$. Заметим, что $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, и $3^2 > 2^3$. Следовательно, если присутствуют хотя бы 3 двойки, то при замене их на 2 тройки произведение увеличится. Получается, двоек не более двух, а все остальные слагаемые — тройки.

Тогда однозначно восстанавливается разбиение:

$$1234 = 2 + 2 + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{410}. \qquad \square$$

Задача 6/2. Полина представила число 2345 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, что произведение этих чисел максимально возможное. Известно, что это произведение делится на 3^k, но не делится на 3^{k+1}. Найдите k.

Ответ: 781.

Решение. Пусть 2345 представлено в виде суммы $a_1 + a_2 + \ldots$. Безусловно, если среди слагаемых присутствуют единицы, то произведение не является максимальным (любую единицу можно добавить к другому слагаемому, и произведение увеличится).

Если какое-нибудь $a_i \geqslant 4$, то заменим его на два слагаемых 2 и $a_i - 2$. Нетрудно понять, что $2(a_i - 2) \geqslant a_i$. Сделаем всевозможные такие замены, при этом общее произведение не уменьшится.

Наше произведение будет иметь вид $2^n 3^k$. Заметим, что $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, и $3^2 > 2^3$. Следовательно, если присутствуют хотя бы 3 двойки, то при замене их на 2 тройки произведение увеличится. Получается, двоек не более двух, а все остальные слагаемые — тройки.

Тогда однозначно восстанавливается разбиение:

$$2345 = 2 + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{781}. \qquad \square$$

Задача 6/3. Полина представила число 4567 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, что произведение этих чисел максимально возможное. Известно, что это произведение делится на 3^k, но не делится на 3^{k+1}. Найдите k.

Ответ: 1521.

Решение. Пусть 4567 представлено в виде суммы $a_1 + a_2 + \ldots$. Безусловно, если среди слагаемых присутствуют единицы, то произведение не является максимальным (любую единицу можно добавить к другому слагаемому, и произведение увеличится).

Если какое-нибудь $a_i \geqslant 4$, то заменим его на два слагаемых 2 и $a_i - 2$. Нетрудно понять, что $2(a_i - 2) \geqslant a_i$. Сделаем всевозможные такие замены, при этом общее произведение не уменьшится.

Наше произведение будет иметь вид $2^n 3^k$. Заметим, что $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, и $3^2 > 2^3$. Следовательно, если присутствуют хотя бы 3 двойки, то при замене их на 2 тройки произведение увеличится. Получается, двоек не более двух, а все остальные слагаемые — тройки.

Тогда однозначно восстанавливается разбиение:

$$4567 = 2 + 2 + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{1521}. \qquad \square$$

10-11 классы

Задача 1/1. Про положительные числа a и b известно, что $a > b$ и $a^2 - 8b^2 = 2ab$. Чему может равняться $\frac{5b+a}{5b-a}$?

Ответ: 9.

Решение. Поделим уравнение $a^2 - 8b^2 = 2ab$ на b^2, получим уравнение $\frac{a^2}{b^2} - 8 = \frac{2a}{b}$. Тогда $\frac{a}{b}$ равно либо 4, либо -2, но второй вариант нам не подходит, так как a и b — положительные числа. Следовательно, $a = 4b$. Имеем

$$\frac{5b+a}{5b-a} = \frac{5b+4b}{5b-4b} = 9\,. \qquad \square$$

Задача 1/2. Про положительные числа a и b известно, что $a > b$ и $a^2 - 12b^2 = -ab$. Чему может равняться $\frac{4b+a}{4b-a}$?

Ответ: 7.

Решение. Поделим уравнение $a^2 - 12b^2 = -ab$ на b^2, получим уравнение $\frac{a^2}{b^2} - 12 = -\frac{a}{b}$. Тогда $\frac{a}{b}$ равно либо 3, либо -4, но второй вариант нам не подходит, так как a и b — положительные числа. Следовательно, $a = 3b$. Имеем

$$\frac{4b+a}{4b-a} = \frac{4b+3b}{4b-3b} = 7\,. \qquad \square$$

Задача 1/3. Про положительные числа a и b известно, что $a > b$ и $a^2 - 10b^2 = 3ab$. Чему может равняться $\frac{6b+a}{6b-a}$?

Ответ: 11.

Решение. Поделим уравнение $a^2 - 10b^2 = 3ab$ на b^2, получим уравнение $\frac{a^2}{b^2} - 10 = \frac{3a}{b}$. Тогда $\frac{a}{b}$ равно либо 5, либо -2, но второй вариант нам не подходит, так как a и b — положительные числа. Следовательно, $a = 5b$. Имеем

$$\frac{6b+a}{6b-a} = \frac{6b+5b}{6b-5b} = 11\,. \qquad \square$$

Задача 1/4. Про положительные числа a и b известно, что $a > b$ и $a^2 - 12b^2 = 4ab$. Чему может равняться $\frac{7b+a}{7b-a}$?

Ответ: 13.

Решение. Поделим уравнение $a^2 - 12b^2 = 4ab$ на b^2, получим уравнение $\frac{a^2}{b^2} - 12 = \frac{4a}{b}$. Тогда $\frac{a}{b}$ равно либо 6, либо -2, но второй вариант нам не подходит, так как a и b — положительные числа. Следовательно, $a = 6b$. Имеем

$$\frac{7b+a}{7b-a} = \frac{7b+6b}{7b-6b} = 13\,. \qquad \square$$

Задача 2/1. На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды каждый житель острова отправил письмо каждому другому. Оказалось, что в 26 письмах написана фраза «Ты рыцарь!», а в 30 оставшихся — «Ты лжец!». Сколько рыцарей могло жить на острове Невезения? Дайте наибольший возможный ответ.

Ответ: 5.

Решение. Если на острове живёт n человек, то всего было отправлено $n(n-1)$ писем, а по условию это число равно $26 + 30 = 56$. Следовательно, на острове живёт 8 человек.

Пусть x — количество рыцарей, живущих на острове, тогда лжецов там $8 - x$. Фраза «Ты рыцарь!» могла быть написана только в письмах от рыцаря к рыцарю или от лжеца к лжецу. Получается уравнение

$$x(x-1) + (8-x)(7-x) = 26\,;$$
$$x^2 - x + 56 - 15x + x^2 = 26\,;$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0\,.$$

Таким образом, либо $x = 3$, либо $x = 5$. Нетрудно проверить, что оба случая нам подходят. □

Задача 2/2. На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды каждый житель острова отправил письмо каждому другому. Оказалось, что в 42 письмах написана фраза «Ты рыцарь!», а в 48 оставшихся — «Ты лжец!». Сколько рыцарей могло жить на острове Невезения? Дайте наибольший возможный ответ.

Ответ: 6.

Решение. Если на острове живёт n человек, то всего было отправлено $n(n-1)$ писем, а по условию это число равно $42 + 48 = 90$. Следовательно, на острове живёт 10 человек.

Пусть x — количество рыцарей, живущих на острове, тогда лжецов там $10 - x$. Фраза «Ты рыцарь!» могла быть написана только в письмах от рыцаря к рыцарю или от лжеца к лжецу. Получается уравнение

$$x(x-1) + (10-x)(9-x) = 42\,;$$
$$x^2 - x + 90 - 19x + x^2 = 42\,;$$
$$x^2 - 10x + 24 = 0\,.$$

Таким образом, либо $x = 4$, либо $x = 6$. Нетрудно проверить, что оба случая нам подходят. □

Задача 2/3. На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды каждый житель острова отправил письмо каждому другому. Оказалось, что в 44 письмах написана фраза «Ты рыцарь!», а в 28 оставшихся — «Ты лжец!». Сколько рыцарей могло жить на острове Невезения? Дайте наибольший возможный ответ.

Ответ: 7.

Решение. Если на острове живёт n человек, то всего было отправлено $n(n-1)$ писем, а по условию это равно $44 + 28 = 72$. Следовательно, на острове живёт 9 человек.

Пусть x — количество рыцарей, живущих на острове, тогда лжецов там $9 - x$. Фраза «Ты рыцарь!» могла быть написана только в письмах от рыцаря к рыцарю или от лжеца к лжецу. Получается уравнение

$$x(x-1) + (9-x)(8-x) = 44\,;$$
$$x^2 - x + 72 - 17x + x^2 = 44\,;$$
$$x^2 - 9x + 14 = 0\,.$$

Таким образом, либо $x = 2$, либо $x = 7$. Нетрудно проверить, что оба случая нам подходят. □

Задача 2/4. На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды каждый житель острова отправил письмо каждому другому. Оказалось, что в 58 письмах написана фраза «Ты рыцарь!», а в 32 оставшихся — «Ты лжец!». Сколько рыцарей могло жить на острове Невезения? Дайте наибольший возможный ответ.

Ответ: 8.

Решение. Если на острове живёт n человек, то всего было отправлено $n(n-1)$ писем, а по условию это равно $58 + 32 = 90$. Следовательно, на острове живёт 10 человек.

Пусть x — количество рыцарей, живущих на острове, тогда лжецов там $10 - x$. Фраза «Ты рыцарь!» могла быть написана только в письмах от рыцаря к рыцарю или от лжеца к лжецу. Получается уравнение

$$x(x-1) + (10-x)(9-x) = 58\,;$$
$$x^2 - x + 90 - 19x + x^2 = 58\,;$$
$$x^2 - 10x + 16 = 0\,.$$

Таким образом, либо $x = 2$, либо $x = 8$. Нетрудно проверить, что оба случая нам подходят. □

Задача 3/1. В ряд выписано 10 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются ровно на один. Сколько различных значений может принимать сумма чисел, если известно, что среди них есть хотя бы одна единица?

Ответ: 21.

Решение. Заметим, что минимальная сумма достигается ровно тогда, когда единицы и двойки чередуются. Таким образом, минимальная сумма равна 15. Максимальная сумма будет достигаться, если встречаются все числа от 1 до 10, то есть она равна 55.

Все числа можно разбить на пары: первое и второе, третье и четвёртое, … В каждой паре сумма чисел нечётна, тогда общая сумма чисел тоже нечётна.

Покажем, как можно получить любую нечётную сумму в диапазоне от 15 до 55. Запустим следующий процесс:

- В начале выписана следующая последовательность чисел: 1, 2, 1, 2, …, 1, 2.
- Если числа не стоят в порядке возрастания, то найдётся число, не стоящее в начале ряда, чьи соседи (или сосед, если это последнее число) больше него. Тогда увеличим это число на 2.

Заметим, что алгоритм закончит работу, когда будут выписаны числа 1, 2, 3, 4, …, 9, 10, при этом сумма пробежит все нечётные значения от 15 до 55, а их ровно 21. □

Задача 3/2. В ряд выписано 12 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются ровно на один. Сколько различных значений может принимать сумма чисел, если известно, что среди них есть хотя бы одна единица?

Ответ: 31.

Решение. Заметим, что минимальная сумма достигается ровно тогда, когда единицы и двойки чередуются. Таким образом, минимальная сумма равна 18. Максимальная сумма будет достигаться, если встречаются все числа от 1 до 12, то есть она равна 78.

Все числа можно разбить на пары: первое и второе, третье и четвёртое, … В каждой паре сумма чисел нечётна, тогда общая сумма чисел чётна.

Покажем, как можно получить любую чётную сумму в диапазоне от 18 до 78. Запустим следующий процесс:

- В начале выписана следующая последовательность чисел: 1, 2, 1, 2, …, 1, 2.

- Если числа не стоят в порядке возрастания, то найдётся число, не стоящее в начале ряда, чьи соседи (или сосед, если это последнее число) больше него. Тогда увеличим это число на 2.

Заметим, что алгоритм закончит работу, когда будут выписаны числа 1, 2, 3, 4, …, 11, 12, при этом сумма пробежит все нечётные значения от 18 до 78, а их ровно 31. $\square$

Задача 3/3. В ряд выписано 14 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются ровно на один. Сколько различных значений может принимать сумма чисел, если известно, что среди них есть хотя бы одна единица?

Ответ: 43.

Решение. Заметим, что минимальная сумма достигается ровно тогда, когда единицы и двойки чередуются. Таким образом, минимальная сумма равна 21. Максимальная сумма будет достигаться, если встречаются все числа от 1 до 14, то есть она равна 105.

Все числа можно разбить на пары: первое и второе, третье и четвёртое, … В каждой паре сумма чисел нечётна, тогда общая сумма чисел тоже нечётна.

Покажем, как можно получить любую нечётную сумму в диапазоне от 21 до 105. Запустим следующий процесс:

- В начале выписана следующая последовательность чисел: 1, 2, 1, 2, …, 1, 2.
- Если числа не стоят в порядке возрастания, то найдётся число, не стоящее в начале ряда, чьи соседи (или сосед, если это последнее число) больше него. Тогда увеличим это число на 2.

Заметим, что алгоритм закончит работу, когда будут выписаны числа 1, 2, 3, 4, …, 13, 14, при этом сумма пробежит все нечётные значения от 21 до 105, а их ровно 43. $\square$

Задача 4/1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На отрезке BH отмечена точка K, а на отрезке CH — точка M так, что $BK : KH = 1 : 2$ и $CM : MH = 1 : 5$. Точка O — точка пересечения высот треугольника AKM. Найдите $AO : OH$.

Ответ: 0,8.

Решение. Решим задачу для общего случая. Пусть $\frac{KH}{KB} = k$, $\frac{HM}{MC} = n$, $BK = x$, $CM = y$ (рис. 4).

Высота AH к гипотенузе прямоугольного треугольника равна

$$\sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{xy(k+1)(n+1)}\,.$$

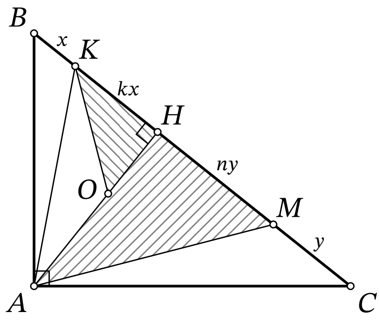


Рис. 4: к решению задачи 4/1

Прямоугольные треугольники KOH и AMH подобны, тогда

$$\frac{OH}{KH} = \frac{HM}{AH};$$

$$\frac{OH}{kx} = \frac{ny}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$OH = \frac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$\frac{AO}{OH} = \frac{AH - OH}{OH} = \frac{\sqrt{xy(k+1)(n+1)} - \dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}}{\dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}} =$$

$$= \frac{xy(k+1)(n+1) - knxy}{knxy} = \frac{n+k+1}{kn}.$$

По условию задачи $k = \frac{KH}{KB} = 2$, $n = \frac{HM}{MC} = 5$, тогда $\frac{AO}{OH} = 0{,}8$. □

Задача 4/2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На отрезке BH отмечена точка K, а на отрезке CH — точка M так, что $BK : KH = 1 : 4$ и $CM : MH = 1 : 5$. Точка O — точка пересечения высот треугольника AKM. Найдите $AO : OH$.

Ответ: 0,5.

Решение. Решим задачу для общего случая. Пусть $\frac{KH}{KB} = k$, $\frac{HM}{MC} = n$, $BK = x$, $CM = y$ (рис. 5).

Высота AH к гипотенузе прямоугольного треугольника равна

$$\sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{xy(k+1)(n+1)}.$$

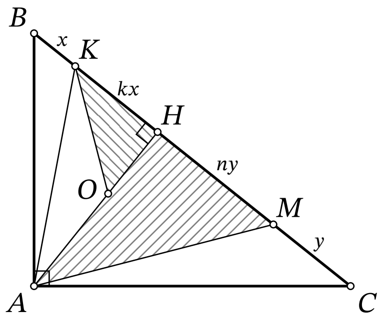


Рис. 5: к решению задачи 4/2

Прямоугольные треугольники KOH и AMH подобны, тогда

$$\frac{OH}{KH} = \frac{HM}{AH};$$

$$\frac{OH}{kx} = \frac{ny}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$OH = \frac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$\frac{AO}{OH} = \frac{AH - OH}{OH} = \frac{\sqrt{xy(k+1)(n+1)} - \dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}}{\dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}} =$$

$$= \frac{xy(k+1)(n+1) - knxy}{knxy} = \frac{n+k+1}{kn}.$$

По условию задачи $k = \frac{KH}{KB} = 4$, $n = \frac{HM}{MC} = 5$, тогда $\frac{AO}{OH} = 0{,}5$. □

Задача 4/3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На отрезке BH отмечена точка K, а на отрезке CH — точка M так, что $BK : KH = 1 : 2$ и $CM : MH = 1 : 10$. Точка O — точка пересечения высот треугольника AKM. Найдите $AO : OH$.

Ответ: 0,65.

Решение. Решим задачу для общего случая. Пусть $\frac{KH}{KB} = k$, $\frac{HM}{MC} = n$, $BK = x$, $CM = y$ (рис. 6).

Высота AH к гипотенузе прямоугольного треугольника равна

$$\sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{xy(k+1)(n+1)}.$$

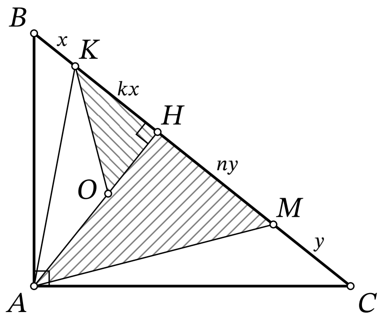


Рис. 6: к решению задачи 4/3

Прямоугольные треугольники KOH и AMH подобны, тогда

$$\frac{OH}{KH} = \frac{HM}{AH};$$

$$\frac{OH}{kx} = \frac{ny}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$OH = \frac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$\frac{AO}{OH} = \frac{AH - OH}{OH} = \frac{\sqrt{xy(k+1)(n+1)} - \dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}}{\dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}} =$$

$$= \frac{xy(k+1)(n+1) - knxy}{knxy} = \frac{n+k+1}{kn}.$$

По условию задачи $k = \frac{KH}{KB} = 2$, $n = \frac{HM}{MC} = 10$, тогда $\frac{AO}{OH} = 0{,}65$. □

Задача 4/4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На отрезке BH отмечена точка K, а на отрезке CH — точка M так, что $BK : KH = 1 : 4$ и $CM : MH = 1 : 10$. Точка O — точка пересечения высот треугольника AKM. Найдите $AO : OH$.

Ответ: 0,375.

Решение. Решим задачу для общего случая. Пусть $\frac{KH}{KB} = k$, $\frac{HM}{MC} = n$, $BK = x$, $CM = y$ (рис. 7).

Высота AH к гипотенузе прямоугольного треугольника равна

$$\sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{xy(k+1)(n+1)}.$$

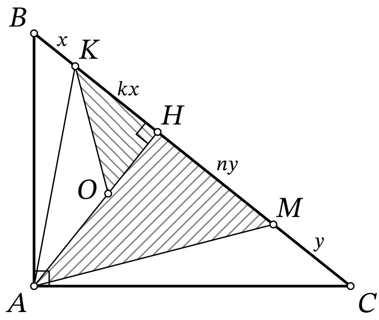


Рис. 7: к решению задачи 4/4

Прямоугольные треугольники KOH и AMH подобны, тогда

$$\frac{OH}{KH} = \frac{HM}{AH};$$

$$\frac{OH}{kx} = \frac{ny}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$OH = \frac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$\frac{AO}{OH} = \frac{AH - OH}{OH} = \frac{\sqrt{xy(k+1)(n+1)} - \dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}}{\dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}} =$$

$$= \frac{xy(k+1)(n+1) - knxy}{knxy} = \frac{n+k+1}{kn}.$$

По условию задачи $k = \frac{KH}{KB} = 4$, $n = \frac{HM}{MC} = 10$, тогда $\frac{AO}{OH} = 0{,}375$. □

Задача 5/1. Через точку $(3;9)$ графика функции $y = x^2$ проходят две перпендикулярные прямые: ℓ_1 и ℓ_2. Прямая ℓ_1 пересекает ось Ox в точке $(a;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(b;b^2)$. Прямая ℓ_2 пересекает ось Ox в точке $(c;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(d;d^2)$. Чему равняется $\frac{ac}{bd}$?

Ответ: -9.

Решение. Лемма. Если прямая $y = kx + t$ пересекает график функции в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс пересекает в точке $(x_3, 0)$, то $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Доказательство леммы. Заметим, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = kx + t$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1 x_2 = -t$. При этом x_3 — корень уравнения

$kx + t = 0$. Получаем цепочку равенств

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-t/k} = -\frac{k}{t} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Лемма доказана.

Используем лемму для прямых ℓ_1 и ℓ_2. Получаем

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3} + \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{3} + \frac{1}{d}\,.$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}\,;$$
$$\frac{3b}{a} = \frac{b^2}{b-a}\,.$$

Нетрудно понять, что $\frac{b^2}{b-a}$ — угловой коэффициент прямой ℓ_1, и он равен $\frac{3b}{a}$. Аналогично, угловой коэффициент ℓ_2 равен $\frac{3d}{c}$. А так как эти прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. Получается, $\frac{ac}{bd} = -9$. $\square$

Задача 5/2. Через точку $(4;16)$ графика функции $y = x^2$ проходят две перпендикулярные прямые: ℓ_1 и ℓ_2. Прямая ℓ_1 пересекает ось Ox в точке $(a;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(b;b^2)$. Прямая ℓ_2 пересекает ось Ox в точке $(c;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(d;d^2)$. Чему равняется $\frac{ac}{bd}$?

Ответ: -16.

Решение. Лемма. Если прямая $y = kx + t$ пересекает график функции в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс пересекает в точке $(x_3, 0)$, то $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Доказательство леммы. Заметим, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = kx + t$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1 x_2 = -t$. При этом x_3 — корень уравения $kx + t = 0$. Получаем цепочку равенств

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-t/k} = -\frac{k}{t} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Лемма доказана.

Используем лемму для прямых ℓ_1 и ℓ_2. Получаем

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{4} + \frac{1}{d}\,.$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}\,;$$
$$\frac{4b}{a} = \frac{b^2}{b-a}\,.$$

Нетрудно понять, что $\frac{b^2}{b-a}$ — угловой коэффициент прямой ℓ_1, и он равен $\frac{4b}{a}$. Аналогично, угловой коэффициент ℓ_2 равен $\frac{4d}{c}$. А так как эти прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. Получается, $\frac{ac}{bd} = -16$. □

Задача 5/3. Через точку $(5;25)$ графика функции $y = x^2$ проходят две перпендикулярные прямые: ℓ_1 и ℓ_2. Прямая ℓ_1 пересекает ось Ox в точке $(a;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(b;b^2)$. Прямая ℓ_2 пересекает ось Ox в точке $(c;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(d;d^2)$. Чему равняется $\frac{ac}{bd}$?

Ответ: -25.

Решение. Лемма. Если прямая $y = kx+t$ пересекает график функции в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс пересекает в точке $(x_3,0)$, то $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Доказательство леммы. Заметим, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = kx + t$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1x_2 = -t$. При этом x_3 — корень уравения $kx + t = 0$. Получаем цепочку равенств

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-t/k} = -\frac{k}{t} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Лемма доказана.

Используем лемму для прямых ℓ_1 и ℓ_2. Получаем

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{5} + \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{5} + \frac{1}{d}\,.$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}\,;$$
$$\frac{5b}{a} = \frac{b^2}{b-a}\,.$$

Нетрудно понять, что $\frac{b^2}{b-a}$ — угловой коэффициент прямой ℓ_1, и он равен $\frac{5b}{a}$. Аналогично, угловой коэффициент ℓ_2 равен $\frac{5d}{c}$. А так как эти прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. Получается, $\frac{ac}{bd} = -25$. □

Задача 5/4. Через точку $(6;36)$ графика функции $y = x^2$ проходят две перпендикулярные прямые: ℓ_1 и ℓ_2. Прямая ℓ_1 пересекает ось Ox в точке $(a;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(b;b^2)$. Прямая ℓ_2 пересекает ось Ox в точке $(c;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(d;d^2)$. Чему равняется $\frac{ac}{bd}$?

Ответ: -36.

Решение. Лемма. Если прямая $y = kx+t$ пересекает график функции в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс пересекает в точке $(x_3, 0)$, то $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Доказательство леммы. Заметим, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = kx + t$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1x_2 = -t$. При этом x_3 — корень уравения $kx + t = 0$. Получаем цепочку равенств

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-t/k} = -\frac{k}{t} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Лемма доказана.

Используем лемму для прямых ℓ_1 и ℓ_2. Получаем

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{6} + \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{6} + \frac{1}{d}\,.$$

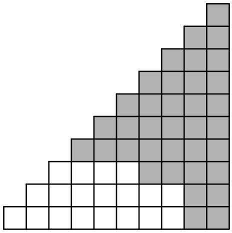
Преобразуем:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}\,;$$
$$\frac{6b}{a} = \frac{b^2}{b-a}\,.$$

Нетрудно понять, что $\frac{b^2}{b-a}$ — угловой коэффициент прямой ℓ_1, и он равен $\frac{6b}{a}$. Аналогично, угловой коэффициент ℓ_2 равен $\frac{6d}{c}$. А так как эти прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. Получается, $\frac{ac}{bd} = -36$. □

Задача 6/1. В треугольном доме в первом подъезде 1 этаж, во втором подъезде — 2 этажа, в третьем — 3, ..., в десятом — 10. Всего в доме 55 квартир — на каждом этаже в каждом подъезде находится ровно одна квартира. Известно, что если в квартире кто-нибудь живёт, то в квартире на этаж выше в том же подъезде тоже кто-нибудь живёт, и квартира на том же этаже, но в следующем по номеру подъезде тоже заселена. Сколько существует таких способов заселить квартиры?

Пример заселения изображен на рисунке, заселённые квартиры отмечены серым. При подсчёте способов заселения каждая квартира считается либо заселённой, либо нет; кто именно в ней живёт, неважно. Случай, когда все квартиры остались пустыми, включается в подсчёт.



Ответ: 1024.

Первое решение. Докажем, что если подъездов n, то способов заселения 2^n; будем рассуждать индукцией по n. База $n = 0$ очевидна.

Пусть утверждение доказано для дома из $n-1$ подъезда; докажем его для дома из n подъездов. Рассмотрим квартиру на первом этаже последнего подъезда. Она либо заселена, либо нет.

В первом случае мы можем выкинуть последний подъезд; ясно, что оставшиеся $n-1$ подъезд могут быть заселены произвольно согласно правилам задачи, то есть 2^{n-1} способами. Во втором случае мы можем выкинуть первый этаж изо всех подъездов; ясно, что оставшиеся этажи могут быть заселены, опять-таки, 2^{n-1} способами.

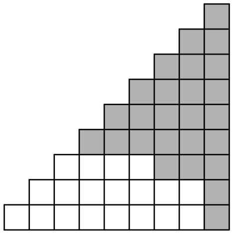
Эти два случая, очевидно, не пересекаются и исчерпывают все возможности. Суммируя их, получаем 2^n. □

Второе решение. Рассмотрим границу между заселёнными и незаселёнными квартирами, которая начинается из правого нижнего угла дома, проходит под всеми заселёнными квартирами и справа от всех незаселённых (считаем, что подъезды были пронумерованы слева направо) и заканчивается на диагональной границе дома. Ясно, что любой способ провести эту линию даст единственный способ заполнить квартиры, и наоборот.

Длина этой линии (измеренная в рёбрах сетки) равна количеству подъездов; при этом каждое её ребро может идти либо влево, либо вверх. Следовательно, количество способов её провести равно соответствующей степени двойки. □

Задача 6/2. В треугольном доме в первом подъезде 1 этаж, во втором подъезде — 2 этажа, в третьем — 3, ..., в девятом — 9. Всего в доме 45 квартир — на каждом этаже в каждом подъезде находится ровно одна квартира. Известно, что если в квартире кто-нибудь живёт, то в квартире на этаж выше в том же подъезде тоже кто-нибудь живёт, и квартира на том же этаже, но в следующем по номеру подъезде тоже заселена. Сколько существует таких способов заселить квартиры?

Пример заселения изображен на рисунке, заселённые квартиры отмечены серым. При подсчёте способов заселения каждая квартира считается либо заселённой, либо нет; кто именно в ней живёт, неважно. Случай, когда все квартиры остались пустыми, включается в подсчёт.



Ответ: 512.

Первое решение. Докажем, что если подъездов n, то способов заселения 2^n; будем рассуждать индукцией по n. База $n = 0$ очевидна.

Пусть утверждение доказано для дома из $n-1$ подъезда; докажем его для дома из n подъездов. Рассмотрим квартиру на первом этаже последнего подъезда. Она либо заселена, либо нет.

В первом случае мы можем выкинуть последний подъезд; ясно, что оставшиеся $n - 1$ подъезд могут быть заселены произвольно согласно правилам задачи, то есть 2^{n-1} способами. Во втором случае мы можем выкинуть первый этаж изо всех подъездов; ясно, что оставшиеся этажи могут быть заселены, опять-таки, 2^{n-1} способами.

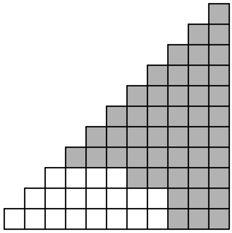
Эти два случая, очевидно, не пересекаются и исчерпывают все возможности. Суммируя их, получаем 2^n. □

Второе решение. Рассмотрим границу между заселёнными и незаселёнными квартирами, которая начинается из правого нижнего угла дома, проходит под всеми заселёнными квартирами и справа от всех незаселённых (считаем, что подъезды были пронумерованы слева направо) и заканчивается на диагональной границе дома. Ясно, что любой способ провести эту линию даст единственный способ заполнить квартиры, и наоборот.

Длина этой линии (измеренная в рёбрах сетки) равна количеству подъездов; при этом каждое её ребро может идти либо влево, либо вверх. Следовательно, количество способов её провести равно соответствующей степени двойки. □

Задача 6/3. В треугольном доме в первом подъезде 1 этаж, во втором подъезде — 2 этажа, в третьем — 3, …, в одиннадцатом — 11. Всего в доме 66 квартир — на каждом этаже в каждом подъезде находится ровно одна квартира. Известно, что если в квартире кто-нибудь живёт, то в квартире на этаж выше в том же подъезде тоже кто-нибудь живёт, и квартира на том же этаже, но в следующем по номеру подъезде тоже заселена. Сколько существует таких способов заселить квартиры?

Пример заселения изображен на рисунке, заселённые квартиры отмечены серым. При подсчёте способов заселения каждая квартира считается либо заселённой, либо нет; кто именно в ней живёт, неважно. Случай, когда все квартиры остались пустыми, включается в подсчёт.



Ответ: 2048.

Первое решение. Докажем, что если подъездов n, то способов заселения 2^n; будем рассуждать индукцией по n. База $n = 0$ очевидна.

Пусть утверждение доказано для дома из $n-1$ подъезда; докажем его для дома из n подъездов. Рассмотрим квартиру на первом этаже последнего подъезда. Она либо заселена, либо нет.

В первом случае мы можем выкинуть последний подъезд; ясно, что оставшиеся $n-1$ подъезд могут быть заселены произвольно согласно правилам задачи, то есть 2^{n-1} способами. Во втором случае мы можем выкинуть первый этаж изо всех подъездов; ясно, что оставшиеся этажи могут быть заселены, опять-таки, 2^{n-1} способами.

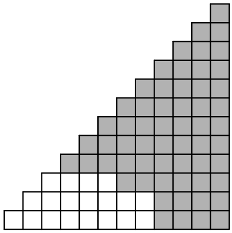
Эти два случая, очевидно, не пересекаются и исчерпывают все возможности. Суммируя их, получаем 2^n. □

Второе решение. Рассмотрим границу между заселёнными и незаселёнными квартирами, которая начинается из правого нижнего угла дома, проходит под всеми заселёнными квартирами и справа от всех незаселённых (считаем, что подъезды были пронумерованы слева направо) и заканчивается на диагональной границе дома. Ясно, что любой способ провести эту линию даст единственный способ заполнить квартиры, и наоборот.

Длина этой линии (измеренная в рёбрах сетки) равна количеству подъездов; при этом каждое её ребро может идти либо влево, либо вверх. Следовательно, количество способов её провести равно соответствующей степени двойки. □

Задача 6/4. В треугольном доме в первом подъезде 1 этаж, во втором подъезде — 2 этажа, в третьем — 3, ..., в двенадцатом — 12. Всего в доме 78 квартир — на каждом этаже в каждом подъезде находится ровно одна квартира. Известно, что если в квартире кто-нибудь живёт, то в квартире на этаж выше в том же подъезде тоже кто-нибудь живёт, и квартира на том же этаже, но в следующем по номеру подъезде тоже заселена. Сколько существует таких способов заселить квартиры?

Пример заселения изображен на рисунке, заселённые квартиры отмечены серым. При подсчёте способов заселения каждая квартира считается либо заселённой, либо нет; кто именно в ней живёт, неважно. Случай, когда все квартиры остались пустыми, включается в подсчёт.



Ответ: 4096.

Первое решение. Докажем, что если подъездов n, то способов заселения 2^n; будем рассуждать индукцией по n. База $n = 0$ очевидна.

Пусть утверждение доказано для дома из $n-1$ подъезда; докажем его для дома из n подъездов. Рассмотрим квартиру на первом этаже последнего подъезда. Она либо заселена, либо нет.

В первом случае мы можем выкинуть последний подъезд; ясно, что оставшиеся $n - 1$ подъезд могут быть заселены произвольно согласно правилам задачи, то есть 2^{n-1} способами. Во втором случае мы можем выкинуть первый этаж изо всех подъездов; ясно, что оставшиеся этажи могут быть заселены, опять-таки, 2^{n-1} способами.

Эти два случая, очевидно, не пересекаются и исчерпывают все возможности. Суммируя их, получаем 2^n. □

Второе решение. Рассмотрим границу между заселёнными и незаселёнными квартирами, которая начинается из правого нижнего угла дома, проходит под всеми заселёнными квартирами и справа от всех незаселённых (считаем, что подъезды были пронумерованы слева направо) и заканчивается на диагональной границе дома. Ясно, что любой способ провести эту линию даст единственный способ заполнить квартиры, и наоборот.

Длина этой линии (измеренная в рёбрах сетки) равна количеству подъездов; при этом каждое её ребро может идти либо влево, либо вверх. Следовательно, количество способов её провести равно соответствующей степени двойки. □