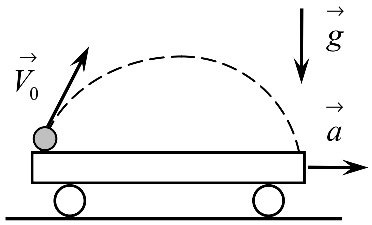
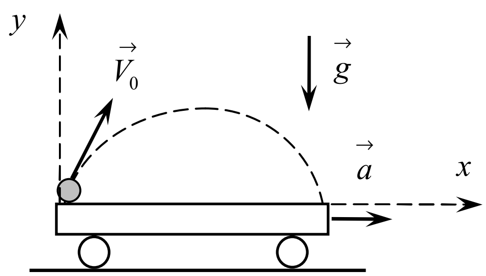
11.1/1. Массивная платформа длиной $L = 9$ м разгоняется с постоянным горизонтальным ускорением $a = 0,5$ м/с^2. С заднего края платформы бьют по мячу. Спустя время $\tau = 2$ с мяч падает на передний край. Найдите начальную скорость V_0 мяча относительно платформы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, векторы $\vec{a}$ и $\vec{V_0}$ лежат в одной вертикальной плоскости. Сопротивление воздуха не учитывайте. Ответ выразите в м/с и округлите до десятых.



Возможное решение



Рассмотрим движение мяча в системе отсчёта, связанной с платформой. Обозначим через $\vec{w}$ ускорение мяча в этой системе. По закону сложения ускорений:

$$\vec{g} = \vec{a} + \vec{w} \quad \to \quad \vec{w} = \vec{g} - \vec{a}$$

Выберем начало координат в той точке платформы, из которой мяч начал двигаться. Ось x направим вдоль вектора $\vec{a}$, ось y – вертикально вверх. Зависимость радиус-вектора мяча от времени определяется обычной формулой для равноускоренного движения:

$$\vec{r} = \vec{V_0}\,t + \frac{\vec{w}\,t^2}{2} = \vec{V_0}\,t + \frac{(\,\vec{g} - \vec{a}\,)\,t^2}{2}$$

В проекциях на координатные оси:

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t - \frac{a\,t^2}{2}$$

$$y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g\,t^2}{2}$$

В момент времени $t = \tau$ имеем: $x = L$, $y = 0$. Получаем:

$$L = V_0 \cos\alpha \cdot \tau - \frac{a\,\tau^2}{2} \quad \to \quad V_0 \cos\alpha = \frac{2\,L + a\,\tau^2}{2\,\tau}$$

$$0 = V_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\,\tau^2}{2} \quad \to \quad V_0 \sin\alpha = \frac{g\,\tau}{2}$$

Возводя получившиеся соотношения в квадрат и складывая их, находим V_0:

$$V_0 = \frac{1}{2\tau}\sqrt{(\,g\,\tau^2\,)^2 + (\,2\,L + a\,\tau^2\,)^2}$$

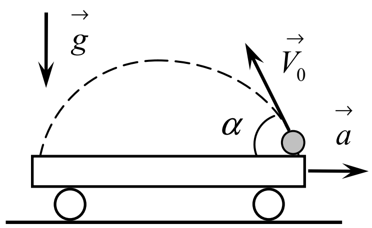
Подставим числовые значения:

$$V_0 = \frac{1}{4}\sqrt{40^2 + 20^2} = 5\sqrt{5} = 11,2 \text{ м/с}$$

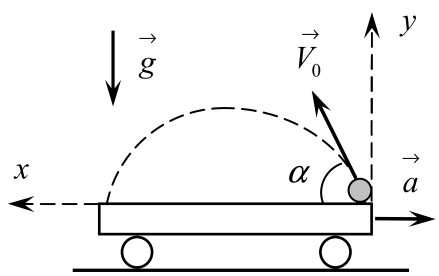
Ответ:

$$V_0 = \frac{1}{2\tau}\sqrt{(\,g\,\tau^2\,)^2 + (\,2\,L + a\,\tau^2\,)^2} = 11,2 \text{ м/с}$$

11.1/2. Массивная платформа длиной $L = 13$ м разгоняется с постоянным горизонтальным ускорением $a = 0,25$ м/с^2. С переднего края платформы бьют по мячу. Спустя время $\tau = 2$ с мяч падает на задний край. Найдите, под каким углом α к горизонту была направлена начальная скорость $\overrightarrow{V_0}$ мяча относительно платформы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{V_0}$ лежат в одной вертикальной плоскости. Сопротивление воздуха не учитывайте. Ответ выразите в градусах и округлите до целого значения.



Возможное решение



Рассмотрим движение мяча в системе отсчёта, связанной с платформой. Обозначим через $\overrightarrow{w}$ ускорение мяча в этой системе. По закону сложения ускорений:

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{w} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{g} - \overrightarrow{a}$$

Выберем начало координат в той точке платформы, из которой мяч начал двигаться. Ось x направим против вектора $\overrightarrow{a}$, ось y – вертикально вверх. Зависимость радиус-вектора мяча от времени определяется обычной формулой для равноускоренного движения:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{V_0}\, t + \frac{\overrightarrow{w}\, t^2}{2} = \overrightarrow{V_0}\, t + \frac{(\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{a}\,)\, t^2}{2}$$

В проекциях на координатные оси:

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t + \frac{a\, t^2}{2}$$

$$y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g\, t^2}{2}$$

В момент времени $t = \tau$ имеем: $x = L$, $y = 0$. Получаем:

$$L = V_0 \cos\alpha \cdot \tau + \frac{a\, \tau^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_0 \cos\alpha = \frac{2\, L - a\, \tau^2}{2\, \tau}$$

$$0 = V_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\, \tau^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_0 \sin\alpha = \frac{g\, \tau}{2}$$

Поделив получившиеся соотношения друг на друга, находим угол α :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{g\, \tau^2}{2L - a\, \tau^2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{g\, \tau^2}{2\, L - a\, \tau^2}\right)$$

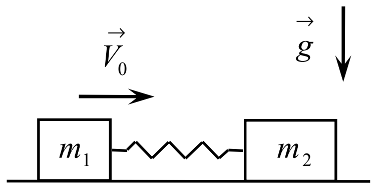
Подставим числовые значения:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{40}{25} = \operatorname{arctg}\frac{8}{5} = 58^\circ$$

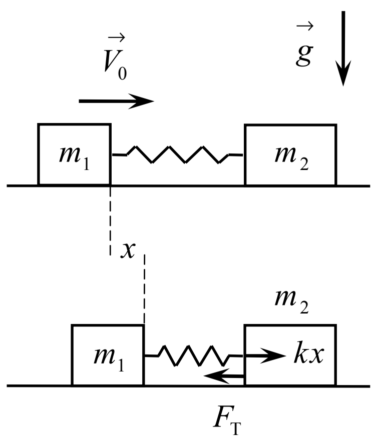
Ответ:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{g\,\tau^2}{2\,L - a\,\tau^2}\right) = 58^\circ$$

11.2/1. На горизонтальном столе лежат бруски 1 и 2, соединённые невесомой недеформированной пружиной жёсткостью $k = 90$ н/м. Массы брусков $m_1 = 0,15$ кг и $m_2 = 0,4$ кг. Коэффициент трения скольжения брусков по столу $\mu = 0,3$. Коротким ударом бруску 1 сообщают скорость, направленную вдоль пружины к бруску 2. Найдите максимальное значение V_0 этой скорости, при котором брусок 2 останется неподвижным. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Возможное решение



Рассмотрим случай, когда при движении бруска 1 брусок 2 остаётся неподвижным. Пусть брусок 1 сместился вправо на расстояние x. При этом сжатие пружины также равно x. На брусок 2 действует сила упругости $k\,x$ и сила трения покоя F_{T}. Так как брусок 2 неподвижен, то

$$k\,x = F_{\text{T}}$$

Сила трения покоя не превосходит своего максимального значения, равного силе трения скольжения:

$$F_{\text{T}} \le \mu\, m_2 g$$

Отсюда получаем ограничение на x:

$$k\,x \le \mu\, m_2 g$$

Это неравенство должно выполняться и при максимальном сжатии пружины x_m:

$$k\,x_m \le \mu\, m_2 g \quad \rightarrow \quad x_m \le \frac{\mu\, m_2 g}{k}$$

Для того чтобы связать x_m с начальной скоростью V_0, запишем уравнение баланса энергии для бруска 1. Учитывая, что при максимальном сжатии пружины брусок 1 останавливается, имеем:

$$\frac{k\,x_m^2}{2} - \frac{m_1 V_0^2}{2} = -\mu\, m_1 g\, x_m$$

В левой части стоит приращение механической энергии бруска 1, в правой части — работа силы трения скольжения. Выразим из этого уравнения V_0^2 :

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{k\,x_m^2}{2} + \mu\, m_1 g\, x_m = \frac{x_m}{2}\,(\,k\,x_m + 2\mu\, m_1 g\,) \quad \rightarrow \quad V_0^2 = \frac{x_m}{m_1}\,(\,k\,x_m + 2\mu\, m_1 g\,)$$

Используя найденное выше ограничение на x_m , получаем:

$$V_0^2 \le \frac{\mu\, m_2 g}{k\, m_1}(\,\mu\, m_2 g + 2\mu\, m_1 g\,) \;\rightarrow\; V_0^2 \le \frac{(\mu g)^2\, m_2}{k}\left(\frac{m_2}{m_1} + 2\right) \;\rightarrow\; V_0 \le \mu g\sqrt{\frac{m_2}{k}\left(\frac{m_2}{m_1} + 2\right)}$$

Как видно, значения начальной скорости, при которых брусок 2 остаётся неподвижным, ограничены сверху. Максимальное значение V_0 равно:

$$V_0 = \mu g\sqrt{\frac{m_2}{k}\left(\frac{m_2}{m_1} + 2\right)}$$

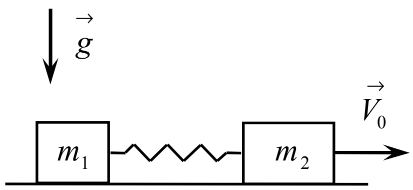
Подставим числовые значения:

$$V_0 = 3\sqrt{\frac{0,4}{90}\left(\frac{0,4}{0,15} + 2\right)} = \sqrt{0,04\left(\frac{40}{15} + 2\right)} = 0,2\sqrt{\frac{14}{3}} = 0,43 \text{ м/с}$$

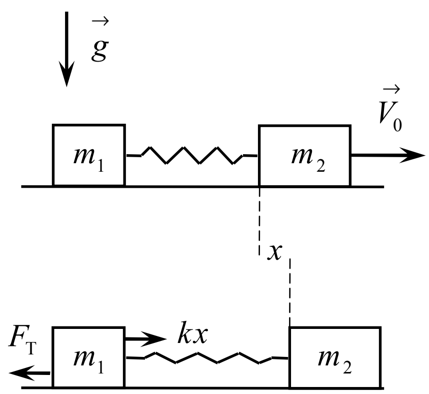
Ответ:

$$V_0 = \mu g\sqrt{\frac{m_2}{k}\left(\frac{m_2}{m_1} + 2\right)} = 0,43 \text{ м/с}$$

11.2/2. На горизонтальном столе лежат бруски 1 и 2, соединённые невесомой недеформированной пружиной жёсткостью $k = 60$ н/м. Массы брусков $m_1 = 0,2$ кг и $m_2 = 0,35$ кг. Коэффициент трения скольжения брусков по столу $\mu = 0,4$. Коротким ударом бруску 2 сообщают скорость, направленную вдоль пружины от бруска 1. Найдите минимальное значение V_0 этой скорости, при котором брусок 1 начнёт двигаться. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Возможное решение



Рассмотрим случай, когда при движении бруска 2 брусок 1 остаётся неподвижным. Пусть брусок 2 сместился вправо на расстояние x. При этом удлинение пружины также равно x. На брусок 1 действует сила упругости $k\,x$ и сила трения покоя $F_{\text{Т}}$. Так как брусок 1 неподвижен, то

$$k\,x = F_{\text{Т}}$$

Сила трения покоя не превосходит своего максимального значения, равного силе трения скольжения:

$$F_{\text{Т}} \le \mu\, m_1 g$$

Отсюда получаем ограничение на x:

$$k\,x \le \mu\, m_1 g$$

Это неравенство должно выполняться и при максимальном удлинении пружины x_m:

$$k\,x_m \le \mu\, m_1 g \quad \rightarrow \quad x_m \le \frac{\mu\, m_1 g}{k}$$

Для того чтобы связать x_m с начальной скоростью V_0, запишем уравнение баланса энергии для бруска 2. Учитывая, что при максимальном удлинении пружины брусок 2 останавливается, имеем:

$$\frac{k\,x_m^2}{2} - \frac{m_2 V_0^2}{2} = -\mu\, m_2 g\, x_m$$

В левой части стоит приращение механической энергии бруска 2, в правой части — работа силы трения скольжения. Выразим из этого уравнения V_0^2:

$$\frac{m_2 V_0^2}{2} = \frac{k\,x_m^2}{2} + \mu\, m_2 g\, x_m = \frac{x_m}{2}\,(\,k\,x_m + 2\mu\, m_2 g\,) \quad \rightarrow \quad V_0^2 = \frac{x_m}{m_2}\,(\,k\,x_m + 2\mu\, m_2 g\,)$$

Используя найденное выше ограничение на x_m , получаем:

$$V_0^2 \le \frac{\mu\, m_1 g}{k\, m_2}(\,\mu\, m_1 g + 2\mu\, m_2 g\,) \;\to\; V_0^2 \le \frac{(\mu g)^2\, m_1}{k}\left(\frac{m_1}{m_2} + 2\right) \;\to\; V_0 \le \mu g\sqrt{\frac{m_1}{k}\left(\frac{m_1}{m_2} + 2\right)}$$

Как видно, значения начальной скорости, при которых брусок 1 остаётся неподвижным, ограничены сверху. Поэтому минимальное значение V_0, при котором брусок 1 начнёт двигаться, определяется правой частью последнего неравенства:

$$V_0 = \mu g\sqrt{\frac{m_1}{k}\left(\frac{m_1}{m_2} + 2\right)}$$

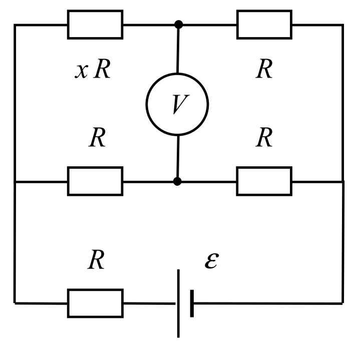
Подставим числовые значения:

$$V_0 = 4\sqrt{\frac{0,2}{60}\left(\frac{0,2}{0,35} + 2\right)} = 4\sqrt{\frac{0,01}{3}\left(\frac{4}{7} + 2\right)} = 0,4\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{7}} = 0,4\sqrt{\frac{6}{7}} = 0,37 \text{ м/с}$$

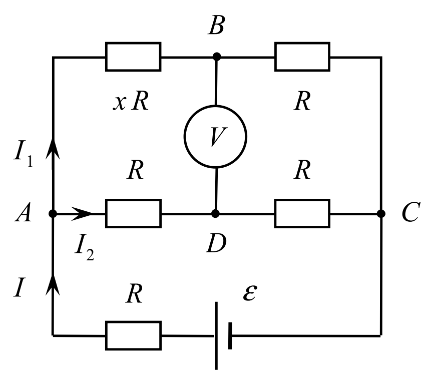
Ответ:

$$V_0 = \mu g\sqrt{\frac{m_1}{k}\left(\frac{m_1}{m_2} + 2\right)} = 0,37 \text{ м/с}$$

11.3/1. Электрическая цепь состоит из батареи с эдс $\varepsilon = 8$ В, идеального вольтметра, четырёх одинаковых сопротивлений R и переменного сопротивления xR. Множитель x подобран так, что тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении xR, максимальна. Найдите напряжение V, которое в этом случае показывает вольтметр. Ответ выразите в вольтах и округлите до сотых. Внутреннее сопротивление батареи не учитывайте.



Возможное решение



Так как сопротивление вольтметра бесконечно велико, ток через него не идёт и при вычислении токов вольтметр можно не учитывать. Найдём сначала ток I, текущий через батарею. Общее сопротивление цепи равно:

$$R_0 = R + \frac{(x+1)R \cdot 2R}{(x+1)R + 2R} = R\left(1 + \frac{2x+2}{x+3}\right) = \frac{R(3x+5)}{x+3}$$

Для тока получаем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{\varepsilon(x+3)}{R(3x+5)}$$

Обозначим через I_1 и I_2 токи, текущие в ветвях ABC и ADC. В узле A имеем:

$$I_1 + I_2 = I$$

Приравнивая напряжения между точками A и C, получаем:

$$I_1(x+1)R = I_2 \cdot 2R \quad \to \quad I_2 = \frac{I_1(x+1)}{2}$$

Из полученных уравнений находим токи I_1 и I_2:

$$I_1 + \frac{I_1(x+1)}{2} = I \quad \to \quad I_1 = \frac{2I}{x+3} = \frac{2\varepsilon}{R(3x+5)}, \quad I_2 = \frac{\varepsilon(x+1)}{R(3x+5)}$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении xR, равна:

$$P = I_1^2\, xR = \frac{4\,\varepsilon^2 x}{R\,(\,3\,x+5\,)^2}$$

Преобразуем это выражение:

$$P = \frac{4\,\varepsilon^2}{3\,R} \cdot \frac{3\,x+5-5}{(\,3\,x+5\,)^2} = \frac{4\,\varepsilon^2}{3\,R}\left(\frac{1}{3\,x+5} - \frac{5}{(\,3\,x+5\,)^2}\right)$$

Введём новую переменную y:

$$y = \frac{1}{3\,x+5}$$

Мощность представляется квадратным трёхчленом относительно этой переменной:

$$P = \frac{4\,\varepsilon^2}{3\,R} \cdot (\,y - 5\,y^2\,)$$

Максимум мощности достигается при $y = 1/10$. Найдём соответствующее значение x:

$$\frac{1}{3\,x+5} = \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad 3\,x+5 = 10 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

Вычислим токи I_1 и I_2 при этом значении x:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{5\,R}\,, \quad I_2 = \frac{4\,\varepsilon}{15\,R}$$

Напряжение на вольтметре выразим через потенциалы точек B, C и D:

$$V = \varphi_D - \varphi_B = \varphi_D - \varphi_C + \varphi_C - \varphi_B$$

С учётом направлений токов имеем:

$$\varphi_D - \varphi_C = I_2 R\,, \quad \varphi_C - \varphi_B = -I_1 R$$

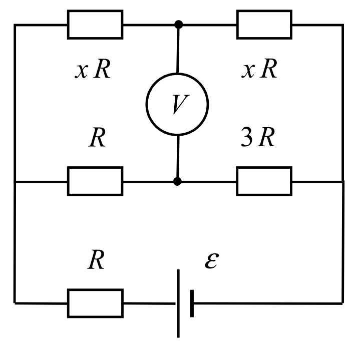
Окончательно получаем:

$$V = (\,I_2 - I_1\,)\,R = \frac{\varepsilon}{15} = 0,53\ \text{В}$$

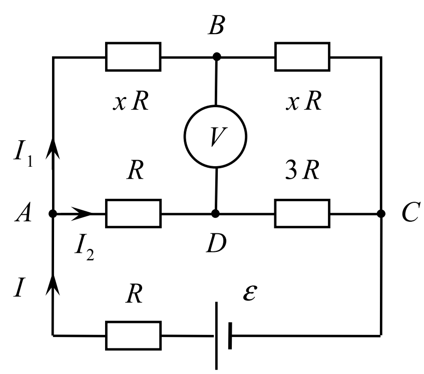
Ответ:

$$V = \frac{\varepsilon}{15} = 0,53\ \text{В}$$

11.3/2. Электрическая цепь состоит из батареи с эдс ε, идеального вольтметра, двух сопротивлений R, одного сопротивления $3R$ и двух переменных сопротивлений xR. Множитель x подобран так, что напряжение на вольтметре $V = \varepsilon/7$. Найдите отношение k суммарной тепловой мощности P, выделяющейся на сопротивлениях xR, к максимальной величине этой мощности P_m: $k = P/P_m$. Ответ округлите до сотых. Внутреннее сопротивление батареи не учитывайте.



Возможное решение



Так как сопротивление вольтметра бесконечно велико, ток через него не идёт и при вычислении токов вольтметр можно не учитывать. Найдём сначала ток I, текущий через батарею. Общее сопротивление цепи равно:

$$R_0 = R + \frac{2\,x\,R \cdot 4\,R}{2\,x\,R + 4\,R} = R\left(1 + \frac{4\,x}{x+2}\right) = \frac{R\,(\,5\,x + 2\,)}{x+2}$$

Для тока получаем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{\varepsilon\,(\,x+2\,)}{R\,(\,5\,x+2\,)}$$

Обозначим через I_1 и I_2 токи, текущие в ветвях ABC и ADC. В узле A имеем:

$$I_1 + I_2 = I$$

Приравнивая напряжения между точками A и C, получаем:

$$I_1 \cdot 2\,x\,R = I_2 \cdot 4\,R \quad \to \quad I_2 = \frac{I_1\,x}{2}$$

Из полученных уравнений находим токи I_1 и I_2:

$$I_1 + \frac{I_1\,x}{2} = I \quad \to \quad I_1 = \frac{2\,I}{x+2} = \frac{2\,\varepsilon}{R\,(\,5\,x+2\,)}\,, \quad I_2 = \frac{\varepsilon\,x}{R\,(\,5\,x+2\,)}$$

Суммарная тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлениях xR, равна:

$$P = 2\, I_1^2\, xR = \frac{8\,\varepsilon^2 x}{R\,(\,5\,x+2\,)^2}$$

Преобразуем это выражение:

$$P = \frac{8\,\varepsilon^2}{5\,R}\cdot\frac{5\,x+2-2}{(\,5\,x+2\,)^2} = \frac{8\,\varepsilon^2}{5\,R}\left(\frac{1}{5\,x+2}-\frac{2}{(\,5\,x+2\,)^2}\right)$$

Введём новую переменную y:

$$y = \frac{1}{5\,x+2}$$

Мощность представляется квадратным трёхчленом относительно этой переменной:

$$P = \frac{8\,\varepsilon^2}{5\,R}\cdot(\,y-2\,y^2\,)$$

Максимум мощности достигается при $y_m = 1/4$. Максимальная мощность равна:

$$P_m = \frac{8\,\varepsilon^2}{5\,R}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{16}\right) = \frac{\varepsilon^2}{5\,R}$$

Напряжение на вольтметре выразим через потенциалы точек A, B и D:

$$V = \varphi_D - \varphi_B = \varphi_D - \varphi_A + \varphi_A - \varphi_B$$

С учётом направлений токов имеем:

$$\varphi_D - \varphi_A = -I_2 R\,, \quad \varphi_A - \varphi_B = I_1\cdot x\,R$$

Получаем:

$$V = (\,I_1 x - I_2\,)\,R = \frac{\varepsilon\,x}{5\,x+2}$$

Найдём значение x, при котором $V = \varepsilon/7$:

$$\frac{\varepsilon\,x}{5\,x+2} = \frac{\varepsilon}{7} \quad\rightarrow\quad 7\,x = 5\,x+2 \quad\rightarrow\quad x = 1$$

Соответствующее значение мощности равно:

$$P = \frac{8\,\varepsilon^2}{5\,R}\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{49}\right) = \frac{8\,\varepsilon^2}{49\,R}$$

Для отношения мощностей получаем:

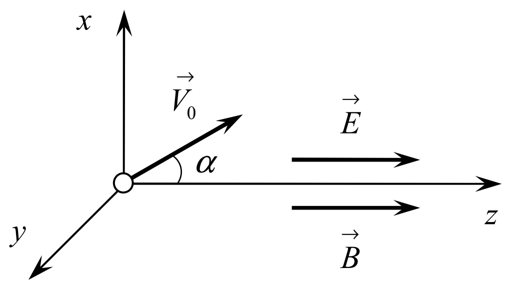
$$k = \frac{P}{P_m} = \frac{40}{49} = 0,82$$

Ответ:

$$k = \frac{40}{49} = 0,82$$

11.4/1. Отрицательно заряженная частица движется в постоянных и однородных электрическом и магнитном полях. Напряжённость электрического поля $E = 20$ кВ/м, индукция магнитного поля $B = 0,01$ Тл, векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ сонаправлены. В начальном положении вектор скорости частицы составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с вектором $\vec{E}$. Найдите минимальное значение V_0 этой скорости, при котором частица вернётся в начальное положение. Ответ выразите в виде безразмерного отношения V_0/c, округлённого до тысячных; $c = 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Возможное решение



Выберем начало координат в точке, из которой начала двигаться частица; ось z направим вдоль вектора $\vec{E}$. Движение в этом направлении определяется только электрическим полем:

$$m\,a_z = -qE \quad\rightarrow\quad a_z = -\frac{qE}{m} \quad\rightarrow\quad z = V_0\cos\alpha\cdot t + \frac{a_z\,t^2}{2} = V_0\cos\alpha\cdot t - \frac{qE\,t^2}{2\,m}$$

Здесь a_z — z–компонента ускорения частицы, m и $(-q)$ — её масса и заряд. Полагая $z = 0$, находим время τ, за которое частица вернётся в плоскость $x\,y$:

$$0 = V_0\cos\alpha\cdot\tau - \frac{qE\,\tau^2}{2\,m} \quad\rightarrow\quad \tau = \frac{2\,m\,V_0\cos\alpha}{qE}$$

Движение в плоскости $x\,y$, перпендикулярной векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$, происходит под действием силы Лоренца и представляет собой равномерное вращение по окружности. Найдём её радиус R и период обращения T. Учитывая, что сила Лоренца равна

$$F_{\text{Л}} = qV_\perp B\,,$$

где $V_\perp = V_0\sin\alpha$ – составляющая скорости, перпендикулярная вектору индукции магнитного поля, получаем:

$$\frac{mV_\perp{}^2}{R} = qV_\perp B \quad\rightarrow\quad R = \frac{mV_\perp}{qB} \quad\rightarrow\quad T = \frac{2\,\pi\,R}{V_\perp} = \frac{2\,\pi\,m}{qB}$$

Частица вернётся в начальное положение, если за время τ совершит целое число оборотов по окружности:

$$\frac{\tau}{T} = n\,,$$

n=1, 2, ... – число оборотов. Подставляя сюда значения τ и T, находим возможные значения начальной скорости:

$$\tau = n\,T \quad\rightarrow\quad \frac{2\,m\,V_0\cos\alpha}{qE} = \frac{2\,\pi\,m}{qB}\cdot n \quad\rightarrow\quad V_0 = \frac{\pi\,E\,n}{B\cos\alpha}$$

Минимальное значение получается при $n = 1$ (один оборот за время τ):

$$V_0 = \frac{\pi E}{B\cos\alpha} \quad\rightarrow\quad \frac{V_0}{c} = \frac{\pi E}{c\,B\cos\alpha}$$

Подставим числовые значения:

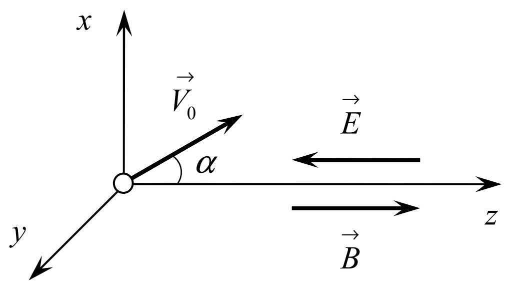
$$\frac{V_0}{c} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-2} \cdot (\sqrt{3}/2)} = \frac{4\,\pi}{3\,\sqrt{3}} \cdot 10^{-2} = 0,024$$

Ответ:

$$\frac{V_0}{c} = \frac{\pi E}{c\,B\cos\alpha} = 0,024$$

11.4/2. Положительно заряженная частица движется в постоянных и однородных электрическом и магнитном полях. Напряжённость электрического поля $E = 15$ кВ/м, вектор индукции магнитного поля $\overrightarrow{B}$ направлен противоположно $\overrightarrow{E}$. В начальном положении скорость частицы $V_0 = 5 \cdot 10^6$м/с составляет угол $\alpha = 45°$ с вектором $\overrightarrow{B}$. Найдите минимальное значение индукции магнитного поля, при котором частица вернётся в начальное положение. Ответ выразите в единицах СИ и округлите до тысячных.

Возможное решение



Выберем начало координат в точке, из которой начала двигаться частица; ось z направим вдоль вектора $\overrightarrow{B}$ (против $\overrightarrow{E}$). Движение в этом направлении определяется только электрическим полем:

$$m\,a_z = -qE \quad \rightarrow \quad a_z = -\frac{qE}{m} \quad \rightarrow \quad z = V_0\cos\alpha \cdot t + \frac{a_z\,t^2}{2} = V_0\cos\alpha \cdot t - \frac{qE\,t^2}{2\,m}$$

Здесь a_z — z–компонента ускорения частицы, m и q — её масса и заряд. Полагая $z = 0$, находим время τ, за которое частица вернётся в плоскость $x\,y$:

$$0 = V_0\cos\alpha \cdot \tau - \frac{qE\,\tau^2}{2\,m} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{2\,m\,V_0\cos\alpha}{qE}$$

Движение в плоскости $x\,y$, перпендикулярной векторам $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{B}$, происходит под действием силы Лоренца и представляет собой равномерное вращение по окружности. Найдём её радиус R и период обращения T. Учитывая, что сила Лоренца равна

$$F_{\text{Л}} = qV_\perp B\,,$$

где $V_\perp = V_0\sin\alpha$ – составляющая скорости, перпендикулярная вектору индукции магнитного поля, получаем:

$$\frac{m{V_\perp}^2}{R} = qV_\perp B \quad \rightarrow \quad R = \frac{mV_\perp}{qB} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\,\pi\,R}{V_\perp} = \frac{2\,\pi\,m}{qB}$$

Частица вернётся в начальное положение, если за время τ совершит целое число оборотов по окружности:

$$\frac{\tau}{T} = n\,,$$

n=1, 2, … – число оборотов. Подставляя сюда значения τ и T, находим возможные значения индукции магнитного поля:

$$\tau = n\,T \quad \rightarrow \quad \frac{2\,m\,V_0\cos\alpha}{qE} = \frac{2\,\pi\,m}{qB}\cdot n \quad \rightarrow \quad B = \frac{\pi\,E\,n}{V_0\cos\alpha}$$

Минимальное значение получается при $n = 1$ (один оборот за время τ):

$$B = \frac{\pi E}{V_0\cos\alpha}$$

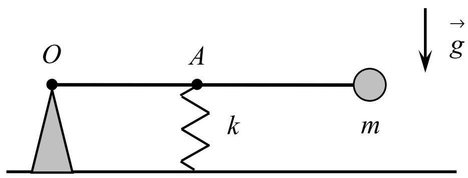
Подставим числовые значения:

$$B = \frac{\pi \cdot 15 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6 \cdot (1/\sqrt{2})} = 3\,\pi\sqrt{2} \cdot 10^{-3} = 0,013 \text{ Тл}$$

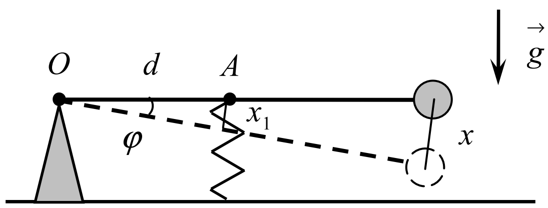
Ответ:

$$B = \frac{\pi E}{V_0 \cos\alpha} = 0,013 \text{ Тл}$$

11.5/1. На горизонтальном столе установлена неподвижная подставка, к вершине O которой прикреплён конец жёсткого стержня длины $L = 30$ см. Стержень может свободно поворачиваться в вертикальной плоскости вокруг точки O. На другом конце стержня закреплён груз массой $m = 0,2$ кг. В точке A, отстоящей от точки O на расстояние $d = 10$ см, к стержню прикреплена вертикальная пружина жёсткостью $k = 400$ н/м. Другой конец пружины закреплён на столе. В положении равновесия пружина сжата и стержень расположен горизонтально. Найдите период T малых вертикальных колебаний стержня с грузом около этого положения. Ответ выразите в секундах и округлите до сотых. Массы стержня и пружины не учитывайте, груз считайте материальной точкой.



Возможное решение



Найдём сначала величину x_0 сжатия пружины в положении равновесия. Приравнивая моменты силы тяжести и силы упругости относительно точки O, получаем:

$$mg\,L = k\,x_0 d \quad \to \quad x_0 = \frac{mg\,L}{k\,d}$$

Предположим, что стержень вывели из положения равновесия небольшим толчком вниз. При этом система получили некоторую энергию E, которая сохраняется при движении. Пусть в некоторый момент времени t стержень отклонился от начального положения на малый угол φ. При этом груз переместился вниз по дуге окружности радиуса L. Для малых углов отклонения эту дугу можно считать вертикальным отрезком. Обозначим его длину через x. Точно также точка A переместилась вниз на расстояние x_1. Найдём связь x и x_1, записав через них угол отклонения:

$$\varphi = \frac{x}{L}, \quad \varphi = \frac{x_1}{d} \quad \to \quad \frac{x}{L} = \frac{x_1}{d} \quad \to \quad x_1 = \frac{x\,d}{L}$$

Обозначим через V скорость груза в рассматриваемом положении. Для энергии имеем:

$$E = \frac{m\,V^2}{2} + \frac{k\,(\,x_0 + x_1\,)^2}{2} - mg\,x$$

Здесь потенциальная энергия груза в поле тяжести принята за нуль в положении равновесия. Раскрывая скобки и используя выражения для x_0 и x_1, получаем:

$$E = \frac{m\,V^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2} + k\,x_0 x_1 + \frac{k\,x_1^2}{2} - mg\,x = \frac{m\,V^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2} + \frac{k\,d^2 x^2}{2\,L^2}$$

Линейные по x слагаемые в этом выражении выпали.

Пусть за малый промежуток времени Δt координата и скорость груза получили приращения Δx и ΔV. Для энергии в момент $t+\Delta t$ имеем:

$$E = \frac{m\,(V+\Delta V)^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2} + \frac{k\,d^2\,(x+\Delta x)^2}{2\,L^2}$$

Приравнивая выражения для энергии, получаем:

$$\frac{m\,(V+\Delta V)^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2} + \frac{k\,d^2\,(x+\Delta x)^2}{2\,L^2} = \frac{m\,V^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2} + \frac{k\,d^2 x^2}{2\,L^2}$$

$$\frac{m}{2}\cdot(2\,V\Delta V + (\Delta V)^2) + \frac{k\,d^2}{2\,L^2}\cdot(2\,x\,\Delta x + (\Delta x)^2) = 0$$

$$m\,V\Delta V\left(1+\frac{\Delta V}{2\,V}\right) + \frac{k\,d^2\,x\,\Delta x}{L^2}\left(1+\frac{\Delta x}{2\,x}\right) = 0$$

Поделим обе части последнего уравнения на Δt:

$$m\,V\cdot\frac{\Delta V}{\Delta t}\cdot\left(1+\frac{\Delta V}{2\,V}\right) + \frac{k\,d^2\,x}{L^2}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\left(1+\frac{\Delta x}{2\,x}\right) = 0$$

При $\Delta t \to 0$ имеем:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \to a\,, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \to V\,, \quad \frac{\Delta V}{2\,V} \to 0\,, \quad \frac{\Delta x}{2\,x} \to 0$$

Здесь a — ускорение груза. Окончательно получаем уравнение движения груза при малых отклонениях от положения равновесия:

$$m\,V a + \frac{k\,d^2\,x}{L^2}\,V = 0 \quad \to \quad a + \frac{k\,d^2}{m\,L^2}\,x = 0$$

Это уравнение гармонических колебаний. Круговая частота колебаний ω равна:

$$\omega^2 = \frac{k\,d^2}{m\,L^2} \quad \to \quad \omega = \frac{d}{L}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Период колебаний:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi L}{d}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

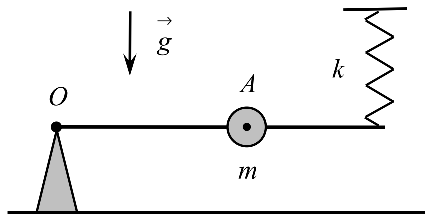
Подставим числовые значения:

$$T = \frac{2\,\pi\cdot 0,3}{0,1}\sqrt{\frac{0,2}{400}} = 0,42 \text{ с}$$

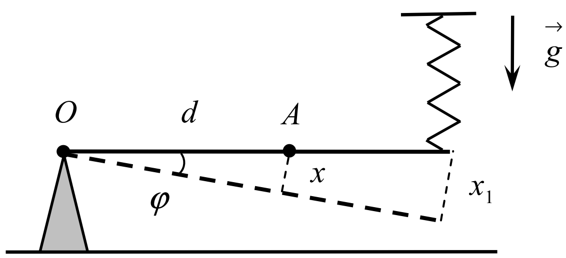
Ответ:

$$T = \frac{2\,\pi L}{d}\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,42 \text{ с}$$

11.5/2. На горизонтальном полу установлена неподвижная подставка, к вершине O которой прикреплён конец жёсткого стержня длины $L = 35$ см. Стержень может свободно поворачиваться в вертикальной плоскости вокруг точки O. Другой конец стержня прикреплён к потолку вертикальной пружиной жёсткостью $k = 50$ н/м. В точке A, отстоящей от точки O на расстояние $d = 25$ см, к стержню прикреплен груз массой $m = 0,3$ кг. В положении равновесия пружина растянута и стержень расположен горизонтально. Найдите период T малых вертикальных колебаний стержня с грузом около этого положения. Ответ выразите в секундах и округлите до сотых. Массы стержня и пружины не учитывайте, груз считайте материальной точкой.



Возможное решение



Найдём сначала величину x_0 удлинения пружины в положении равновесия. Приравнивая моменты силы тяжести и силы упругости относительно точки O, получаем:

$$mg\,d = k\,x_0 L \quad \to \quad x_0 = \frac{mg\,d}{k\,L}$$

Предположим, что стержень вывели из положения равновесия небольшим толчком вниз. При этом система получили некоторую энергию E, которая сохраняется при движении. Пусть в некоторый момент времени t стержень отклонился от начального положения на малый угол φ. При этом груз переместился вниз по дуге окружности радиуса d. Для малых углов отклонения эту дугу можно считать вертикальным отрезком. Обозначим его длину через x. Точно также правый конец стержня, к которому прикреплена пружина, переместился вниз на расстояние x_1. Найдём связь x и x_1, записав через них угол отклонения:

$$\varphi = \frac{x}{d}, \quad \varphi = \frac{x_1}{L} \quad \to \quad \frac{x}{d} = \frac{x_1}{L} \quad \to \quad x_1 = \frac{x\,L}{d}$$

Обозначим через V скорость груза в рассматриваемом положении. Для энергии имеем:

$$E = \frac{m\,V^2}{2} + \frac{k\,(\,x_0 + x_1\,)^2}{2} - mg\,x$$

Здесь потенциальная энергия груза в поле тяжести принята за нуль в положении равновесия. Раскрывая скобки и используя выражения для x_0 и x_1, получаем:

$$E = \frac{m\,V^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2} + k\,x_0 x_1 + \frac{k\,x_1^2}{2} - mg\,x = \frac{m\,V^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2} + \frac{k\,L^2 x^2}{2\,d^2}$$

Линейные по x слагаемые в этом выражении выпали.

Пусть за малый промежуток времени Δt координата и скорость груза получили приращения Δx и ΔV. Для энергии в момент $t + \Delta t$ имеем:

$$E = \frac{m\,(V + \Delta V)^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2} + \frac{k\,L^2\,(x + \Delta x)^2}{2\,d^2}$$

Приравнивая выражения для энергии, получаем:

$$\frac{m\,(V + \Delta V)^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2} + \frac{k\,L^2\,(x + \Delta x)^2}{2\,d^2} = \frac{m\,V^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2} + \frac{k\,L^2 x^2}{2\,d^2}$$

$$\frac{m}{2} \cdot (\,2\,V\Delta V + (\Delta V)^2\,) + \frac{k\,L^2}{2\,d^2} \cdot (\,2\,x\,\Delta x + (\Delta x)^2\,) = 0$$

$$m\,V\Delta V\left(1 + \frac{\Delta V}{2\,V}\right) + \frac{k\,L^2\,x\,\Delta x}{d^2}\left(1 + \frac{\Delta x}{2\,x}\right) = 0$$

Поделим обе части последнего уравнения на Δt:

$$m\,V \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \left(1 + \frac{\Delta V}{2\,V}\right) + \frac{k\,L^2\,x}{d^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{2\,x}\right) = 0$$

При $\Delta t \to 0$ имеем:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \to a\,, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \to V\,, \quad \frac{\Delta V}{2\,V} \to 0\,, \quad \frac{\Delta x}{2\,x} \to 0$$

Здесь a — ускорение груза. Окончательно получаем уравнение движения груза при малых отклонениях от положения равновесия:

$$m\,V a + \frac{k\,L^2\,x}{d^2}\,V = 0 \quad \to \quad a + \frac{k\,L^2}{m\,d^2}\,x = 0$$

Это уравнение гармонических колебаний. Круговая частота колебаний ω равна:

$$\omega^2 = \frac{k\,L^2}{m\,d^2} \quad \to \quad \omega = \frac{L}{d}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Период колебаний:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi d}{L}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Подставим числовые значения:

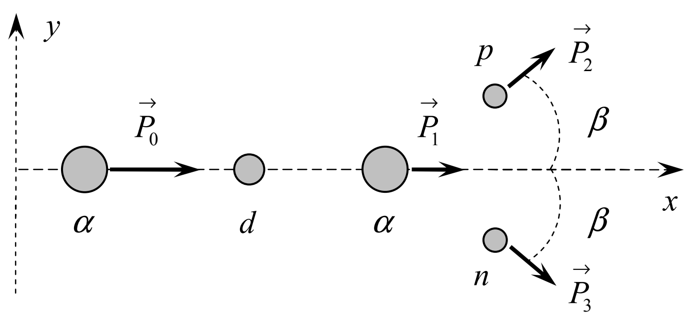
$$T = \frac{2\,\pi \cdot 0,25}{0,35}\sqrt{\frac{0,3}{50}} = 0,35 \text{ с}$$

Ответ:

$$T = \frac{2\,\pi d}{L}\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,35 \text{ с}$$

11.6/1. Дейтрон представляет собой простейшее ядро, состоящее из протона и нейтрона. Пусть в результате неупругого столкновения α-частицы с неподвижным дейтроном α-частица продолжает двигаться в прежнем направлении, а протон и нейтрон, входившие в состав дейтрона, разлетаются симметрично относительно этого направления под углом $\beta = 60^\circ$ к нему (каждая частица — протон и нейтрон — движется под углом β к направлению движения α-частицы). Найдите минимальное значение K начальной кинетической энергии α-частицы, при котором такой процесс разрешён законами сохранения энергии и импульса. Ответ выразите в виде отношения $x = K/E$, где E — энергия связи дейтрона (это минимальная энергия, которую необходимо затратить для того, чтобы разрушить дейтрон и высвободить протон и нейтрон). Считайте, что масса α-частицы в 4 раза больше массы протона, а массы протона и нейтрона одинаковы.

Возможное решение



На рисунке буквами α, d, p и n обозначены α-частица, дейтрон, протон и нейтрон. Пусть $\overrightarrow{P_0}$ и $\overrightarrow{P_1}$ — начальный и конечный импульсы α-частицы, $\overrightarrow{P_2}$ и $\overrightarrow{P_3}$ — импульсы протона и нейтрона. Массу протона обозначим через m; масса α-частицы равна $4\,m$. Запишем закон сохранения импульса:

$$\overrightarrow{P_0} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3}$$

Направим ось x неподвижной системы координат вдоль вектора $\overrightarrow{P_0}$, ось y — в перпендикулярном направлении. В проекциях на оси имеем:

$$P_2 \sin\beta = P_3 \sin\beta \quad \rightarrow \quad P_2 = P_3\,,$$

$$P_0 = P_1 + P_2\cos\beta + P_3\cos\beta = P_1 + 2\,P_2\cos\beta \quad \rightarrow \quad P_1 = P_0 - 2\,P_2\cos\beta$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{P_0^2}{8\,m} = \frac{P_1^2}{8\,m} + 2\cdot\frac{P_2^2}{2\,m} + E \quad \rightarrow \quad P_0^2 = P_1^2 + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E$$

Подставляя сюда выражение для P_1, получаем квадратное уравнение для импульса P_2:

$$P_0^2 = (\,P_0 - 2\,P_2\cos\beta\,)^2 + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E\,,$$

$$P_0^2 = P_0^2 - 4\,P_0\,P_2\cos\beta + 4\,P_2^2\cos^2\beta + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E\,,$$

$$(\,2 + \cos^2\beta\,)\,P_2^2 - P_0\cos\beta\,P_2 + 2\,m\,E = 0$$

Дискриминант уравнения равен:

$$D = P_0^2\cos^2\beta - 4\,(\,2 + \cos^2\beta\,)\cdot 2\,m\,E$$

Условие существования действительных корней уравнения:

$$D \geq 0 \quad \rightarrow \quad P_0^2 \geq \frac{8\,m\,E\,(\,2 + \cos^2\beta\,)}{\cos^2\beta}$$

Для начальной кинетической энергии α-частицы получаем неравенство:

$$K = \frac{P_0^2}{8\,m} \geq \frac{E\,(\,2 + \cos^2\beta\,)}{\cos^2\beta}$$

Минимальное значение кинетической энергии:

$$K = \frac{E\,(\,2 + \cos^2\beta\,)}{\cos^2\beta}$$

Соответствующее значение отношения K/E:

$$x = \frac{K}{E} = \frac{2 + \cos^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{2}{\cos^2\beta} + 1 = 2\,(\,\mathrm{tg}^2\beta + 1\,) + 1 = 2\,\mathrm{tg}^2\beta + 3$$

При $\beta = 60^\circ$ получаем:

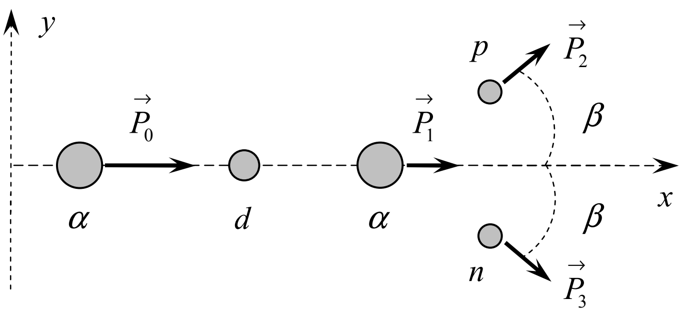
$$x = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$

Ответ:

$$x = 2\,\mathrm{tg}^2\beta + 3 = 9$$

11.6/2. Дейтрон представляет собой простейшее ядро, состоящее из протона и нейтрона. Пусть в результате неупругого столкновения α-частицы с неподвижным дейтроном α-частица продолжает двигаться в прежнем направлении, а протон и нейтрон, входившие в состав дейтрона, разлетаются симметрично относительно этого направления под углом β к нему (каждая частица — протон и нейтрон — движется под углом β к направлению движения α-частицы). Найдите максимально возможное значение угла β, совместимое с законами сохранения энергии и импульса. Известно отношение x начальной кинетической энергии K α-частицы к энергии связи дейтрона E: $x = K/E = 4$ (энергия связи - это минимальная энергия, которую необходимо затратить для того, чтобы разрушить дейтрон и высвободить протон и нейтрон). Ответ выразите в градусах и округлите до целого значения. Считайте, что масса α-частицы в 4 раза больше массы протона, а массы протона и нейтрона одинаковы.

Возможное решение



На рисунке буквами α, d, p и n обозначены α-частица, дейтрон, протон и нейтрон. Пусть $\overrightarrow{P_0}$ и $\overrightarrow{P_1}$ — начальный и конечный импульсы α-частицы, $\overrightarrow{P_2}$ и $\overrightarrow{P_3}$ — импульсы протона и нейтрона. Массу протона обозначим через m; масса α-частицы равна $4\,m$. Запишем закон сохранения импульса:

$$\overrightarrow{P_0} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3}$$

Направим ось x неподвижной системы координат вдоль вектора $\overrightarrow{P_0}$, ось y — в перпендикулярном направлении. В проекциях на оси имеем:

$$P_2 \sin\beta = P_3 \sin\beta \quad \to \quad P_2 = P_3\,,$$

$$P_0 = P_1 + P_2\cos\beta + P_3\cos\beta = P_1 + 2\,P_2\cos\beta \quad \to \quad P_1 = P_0 - 2\,P_2\cos\beta$$

Так как $P_1 < P_0$, из последнего соотношения следует, что $\cos\beta > 0$.

Далее воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{P_0^2}{8\,m} = \frac{P_1^2}{8\,m} + 2\cdot\frac{P_2^2}{2\,m} + E \quad \to \quad P_0^2 = P_1^2 + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E$$

Подставляя сюда выражение для P_1, получаем квадратное уравнение для импульса P_2:

$$P_0^2 = (\,P_0 - 2\,P_2\cos\beta\,)^2 + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E\,,$$

$$P_0^2 = P_0^2 - 4\,P_0\,P_2\cos\beta + 4\,P_2^2\cos^2\beta + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E\,,$$

$$(\,2 + \cos^2\beta\,)\,P_2^2 - P_0\cos\beta\,P_2 + 2\,m\,E = 0$$

Дискриминант уравнения равен:

$$D = P_0^2\cos^2\beta - 4\,(\,2 + \cos^2\beta\,)\cdot 2\,m\,E$$

Перепишем это выражение через отношение x:

$$x = \frac{K}{E} = \frac{P_0^2}{8\,m\,E} \quad \to \quad D = 8\,m\,E\,(\,(\,x-1\,)\cos^2\beta - 2\,)$$

Из условия существования действительных корней уравнения получаем ограничение на угол β:

$$D \geq 0 \quad \to \quad (x-1)\cos^2\beta - 2 \geq 0 \quad \to \quad \cos^2\beta \geq \frac{2}{x-1}$$

Так как $\cos\beta > 0$, то:

$$\cos\beta \geq \sqrt{\frac{2}{x-1}} \quad \to \quad \beta \leq \arccos\sqrt{\frac{2}{x-1}}$$

Максимальное значение β равно:

$$\beta = \arccos\sqrt{\frac{2}{x-1}}$$

При $x = 4$ получаем:

$$\beta = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} = 35^\circ$$

Ответ:

$$\beta = \arccos\sqrt{\frac{2}{x-1}} = 35^\circ$$