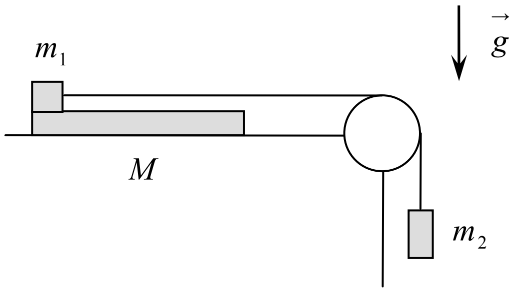
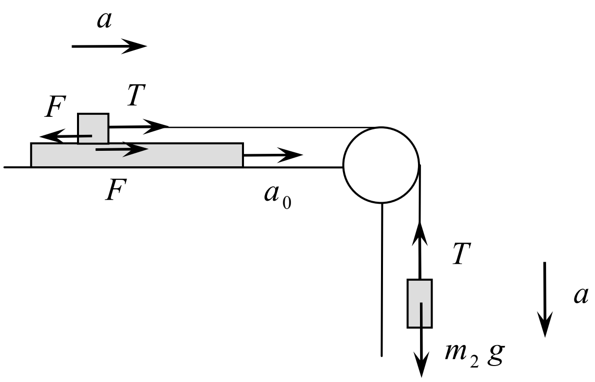
Задача 1. На гладком горизонтальном столе лежит доска массой $M = 3$ кг и длиной $L = 0{,}8$ м. На краю доски стоит маленький брусок массой $m_1 = 0{,}15$ кг. К бруску привязана длинная невесомая нерастяжимая нить, переброшенная через гладкую трубу, закреплённую на краю стола. К вертикальному концу нити подвешивают груз массой $m_2 = 0{,}05$ кг и отпускают его без толчка. Найдите время τ, за которое брусок соскользнёт с доски. Коэффициент трения скольжения бруска по доске $\mu = 0{,}25$; ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



Запишем второй закон Ньютона для бруска, груза и доски в неподвижной системе отсчёта, связанной со столом:

$$\begin{aligned} m_1\,a &= T - F\,, \\ m_2\,a &= m_2\,g - T\,, \\ Ma_0 &= F\,. \end{aligned}$$

Здесь a — ускорение бруска и груза, a_0 — ускорение доски, T — сила натяжение нити, $F = \mu m_1\,g$ — сила трения скольжения, действующая между бруском и доской. Из этих уравнений находим ускорения:

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2}\,g\,, \quad a_0 = \frac{\mu m_1\,g}{M}\,.$$

Ускорение бруска относительно доски равно:

$$a' = a - a_0 = \frac{Mm_2 - \mu m_1\,(m_1 + m_2 + M)}{M\,(m_1 + m_2)}\,.$$

Относительно доски брусок проходит расстояние L. Из этого условия находим время τ:

$$L = \frac{a'\,\tau^2}{2} \quad \longrightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2L}{a'}} = \sqrt{\frac{2L}{g}\cdot\frac{M\,(m_1 + m_2)}{Mm_2 - \mu m_1\,(m_1 + m_2 + M)}} = 1{,}8 \text{ с}$$

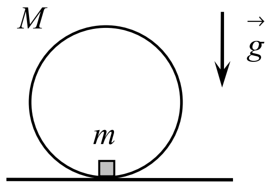
Ответ:

$$\tau = \sqrt{\frac{2L}{g}\cdot\frac{M\,(m_1 + m_2)}{Mm_2 - \mu m_1\,(m_1 + m_2 + M)}} = 1{,}8 \text{ с}$$

Критерии

1. Правильно записан второй закон Ньютона для бруска, груза и доски (+3 балла).
2. Правильно найдены ускорения бруска и доски (+2 балла).
3. Правильно рассмотрено относительное движение бруска и доски (+2 балла).
4. Получен правильный буквенный ответ (+2 балла).
5. Получен правильный числовой ответ (+1 балл).

Задача 2. На горизонтальном столе стоит тонкий обруч массой $M = 50$ г и радиусом $R = 0{,}1$ м. Масса обруча равномерно распределена по его длине. К внутренней стороне обруча прикреплён точечный груз массой $m = 4$ г. В положении равновесия груз находится в самой нижней точке обруча. Найдите период T малых колебаний обруча около этого положения. Считайте, что обруч катается по столу без проскальзывания. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу о кинетической энергии обруча, катящегося по столу без проскальзывания. Мысленно разобьём обруч на малые элементы и перенумеруем их индексом j. Пусть $\vec{V}$ — скорость центра обруча относительно стола, m_j — масса элемента с номером j, $\vec{V}_j'$ — скорость этого элемента относительно центра обруча. Так как относительно центра все элементы движутся по окружности, скорости $\vec{V}_j'$ направлены по касательной к обручу и одинаковы по абсолютной величине. Обозначим эту абсолютную величину через V'. Так как обруч катится без проскальзывания, мгновенная скорость точки касания обруча со столом равна нулю. Отсюда следует, что

$$V' = V\,.$$

Скорость элемента j относительно стола равна:

$$\vec{V}_j = \vec{V} + \vec{V}_j'\,.$$

Для кинетической энергии обруча имеем:

$$K = \sum_j \frac{m_j V_j^2}{2} = \sum_j \frac{m_j\,(\vec{V} + \vec{V}_j')^2}{2} = \sum_j \frac{m_j V^2}{2} + \sum_j m_j\,\vec{V}\vec{V}_j' + \sum_j \frac{m_j V'^2}{2}\,.$$

В силу равенства $V' = V$ первая и последняя суммы одинаковы:

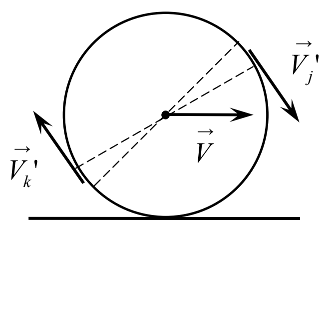
$$\sum_j \frac{m_j V^2}{2} = \sum_j \frac{m_j V'^2}{2} = \left(\sum_j m_j\right)\frac{V^2}{2} = \frac{MV^2}{2}\,.$$

Здесь сумма масс m_j равна массе обруча M. Рассмотрим оставшуюся сумму:

$$\sum_j m_j\,\vec{V}\vec{V}_j' = \vec{V}\,\sum_j m_j\,\vec{V}_j'\,.$$

Докажем, что эта сумма равна нулю:

$$\sum_j m_j\,\vec{V}_j' = 0\,.$$



Для этого разобьём обруч на чётное число одинаковых элементов массой Δm каждый. Тогда

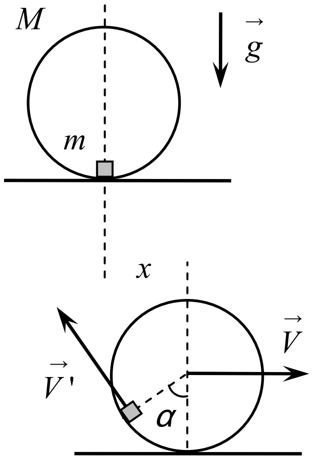
$$\sum_j m_j \overrightarrow{V'_j} = \Delta m \sum_j \overrightarrow{V'_j} .$$

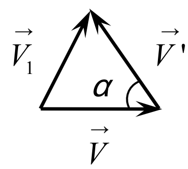
Для каждого элемента j имеется диаметрально противоположный элемент k, скорость которого равна $-\overrightarrow{V'_j}$:

$$\overrightarrow{V'_k} = -\overrightarrow{V'_j} .$$

Поэтому вклад этой пары элементов в рассматриваемую сумму равен нулю. Поскольку все элементы можно сгруппировать в такие пары, то и вся сумма обращается в нуль. Окончательно получаем:

$$K = \frac{MV^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = MV^2 .$$





Перейдём теперь к задаче о колебаниях обруча с грузом. Выведем обруч из положения равновесия, слегка толкнув его вправо и сообщив некоторую энергию E. Так как обруч катится по столу без проскальзывания, энергия сохраняется. Запишем её для промежуточного положения, в котором центр обруча сместился на расстояние x от своего первоначального положения, а все точки обруча повернулись на угол α относительно центра. Пусть $\overrightarrow{V}$ — скорость центра обруча в этом положении, а $\overrightarrow{V\,'}$ — скорость груза относительно центра. Как и раньше имеем равенство $V\,' = V$. Скорость груза относительно стола равна:

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{V\,'} .$$

Её абсолютная величина:

$$V_1 = 2\,V \sin\frac{\alpha}{2} .$$

Принимая потенциальную энергию в положении равновесия за нуль, получаем:

$$E = MV^2 + \frac{mV_1^2}{2} + mgR\,(\,1-\cos\alpha\,) = MV^2\left(1 + \frac{2m}{M}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + mgR\,(\,1-\cos\alpha\,) .$$

Упростим это выражение для малых значений угла α:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \ll 1\,, \quad 1 + \frac{2m}{M}\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx 1\,, \quad 1-\cos\alpha = 2\,\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2}\,,$$

$$E = MV^2 + \frac{mgR\,\alpha^2}{2} .$$

Обозначим через ω мгновенную угловую скорость вращения обруча вокруг центра. Имеем:

$$V\,' = \omega R\,, \quad V' = V \quad \longrightarrow \quad V = \omega R\,.$$

Пусть $\Delta\,x$ и $\Delta\,\alpha$ — приращения координаты x и угла α за малое время $\Delta\,t$. Тогда

$$\frac{\Delta\,x}{\Delta\,t} = \frac{\Delta\,\alpha}{\Delta\,t}\,R \quad \longrightarrow \quad \Delta\,(\,x - \alpha R\,) = 0\,.$$

Отсюда следует, что разность $(x - \alpha R)$ не зависит от времени. Учитывая, что в начальный момент x и α равны нулю, получаем:

$$x = \alpha R \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{x}{R}\,,$$

$$E = MV^2 + \frac{mg\,x^2}{2R}\,.$$

Это выражение подобно выражению для энергии груза массой m_0, колеблющегося на пружине жёсткости k:

$$E = \frac{m_0 V^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2}\,.$$

Период колебаний такого груза равен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}\,.$$

Сделав в этой формуле замену

$$m_0 \to 2M \quad \text{и} \quad k \to \frac{mg}{R}\,,$$

находим период колебаний в нашей задаче:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR}{mg}} = 3{,}14\ \text{с}\,.$$

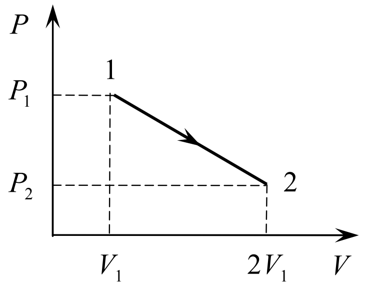
Ответ:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR}{mg}} = 3{,}14\ \text{с}$$

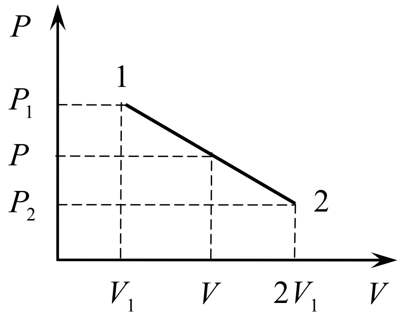
Критерии

1. Правильно записано выражение для кинетической энергии обруча с грузом (+3 балла).
2. Правильно записано выражение для полной механической энергии (+1 балл).
3. Правильно получена связь между смещением обруча и углом его поворота (+2 балла).
4. Получено правильное выражение для энергии при малых смещениях обруча (+1 балл).
5. Получен правильный буквенный ответ (+2 балла).
6. Получен правильный числовой ответ (+1 балл).

Задача 3. Один моль идеального одноатомного газа переводят из начального состояния 1 с давлением P_1 и объёмом V_1 в конечное состояние 2 с давлением $P_2 < P_1$ и объёмом $2\,V_1$. На диаграмме $P-V$ процесс перехода изображается прямолинейным отрезком, соединяющим точки 1 и 2. Найдите минимальное значение конечного давления P_2 , при котором в рассматриваемом процессе газ не будет отдавать тепло.



Возможное решение



Обозначим через P и V давление и объём газа в промежуточном состоянии. На отрезке $1-2$ эти величины связаны линейным соотношением:

$$P = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{V_1}\,(\,V - V_1\,)\,.$$

Введём безразмерную переменную x:

$$x = \frac{V - V_1}{V_1}\,.$$

При изменении объёма от V_1 до $2\,V_1$ переменная x меняется от 0 до 1. На отрезке $1-2$ имеем:

$$P = P_1 + (\,P_2 - P_1\,)\,x = P_1\,[\,1 - (\,1-\alpha\,)\,x\,]\,.$$

Выразим подведённое к газу количество теплоты Q как функцию x. Для этого запишем первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta\,U + A\,.$$

Пусть T_1 и T — температуры газа в начальном и промежуточном состояниях. Тогда приращение внутренней энергии газа равно:

$$\Delta\,U = \frac{3}{2}\,R\,T - \frac{3}{2}\,R\,T_1 = \frac{3}{2}\,(\,PV - P_1V_1\,)\,.$$

Подставляя сюда выражение для P, получаем:

$$\Delta\,U = \frac{3}{2}\,P_1V_1\,x\,[\,\alpha - (\,1-\alpha\,)\,x\,]\,.$$

Работу газа A вычислим как площадь трапеции:

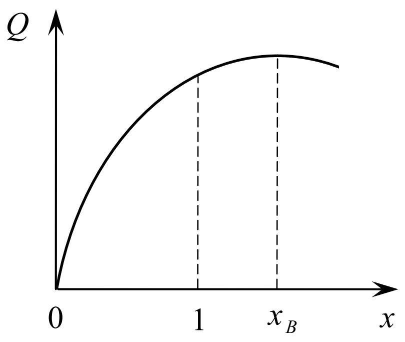
$$A = \frac{1}{2}\,(\,P + P_1\,)\,(\,V - V_1\,) = \frac{1}{2}\,P_1V_1\,x\,[\,2 - (\,1-\alpha\,)\,x\,]\,.$$

Для количества теплоты получаем:

$$Q = \frac{1}{2} P_1 V_1 \left[(3\alpha + 2) x - 4(1-\alpha) x^2 \right] .$$

График зависимости Q от x представляет собой параболу. Так как $\alpha < 1$, ветви параболы направлены вниз. Координата вершины x_B равна:

$$x_B = \frac{3\alpha + 2}{8(1-\alpha)} .$$



Газ не будет отдавать тепло, если все значения x из промежутка $[0, 1]$ соответствуют восходящей ветви параболы. В этом случае

$$x_B \geq 1 .$$

Отсюда получаем ограничение на величину параметра α:

$$\frac{3\alpha + 2}{8(1-\alpha)} \geq 1 \quad \longrightarrow \quad \alpha \geq \frac{6}{11} .$$

Минимальное значение α равно:

$$\alpha = \frac{6}{11} .$$

Оно соответствует равенству $x_B = 1$.

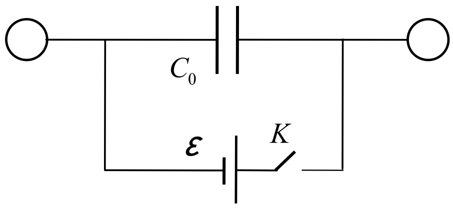
Ответ:

$$\alpha = \frac{6}{11} .$$

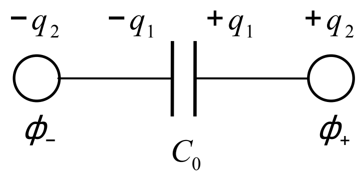
Критерии

1. Правильно записана зависимость давления от объёма (+1 балл).
2. Правильно записано первое начало термодинамики (+1 балл).
3. Получены правильные выражения для приращения внутренней энергии, работы газа и количества теплоты (+4 балла).
4. Исследована зависимость количества теплоты от объёма (+2 балла).
5. Правильно сформулировано условие того, что тепло не отводится (+1 балла).
6. Получен правильный ответ (+1 балл).

Задача 4. При помощи длинных тонких проводов обкладки плоского конденсатора ёмкостью $C_0 = 3{,}5$ пФ присоединены к двум одинаковым металлическим шарикам радиуса $R = 2{,}7$ см (каждая обкладка присоединена к одному шарику). Вся система подключена к батарее с ЭДС $\varepsilon = 12$ В через ключ K. Сначала ключ разомкнут, конденсатор и шарики не заряжены. Найдите количество теплоты Q, выделившееся в цепи после замыкания ключа. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф .



Возможное решение



В задаче рассматривается сложный конденсатор, обкладками которого являются пластины плоского конденсатора, соединённые с шариками. Найдём ёмкость C этого конденсатора. Поместим на обкладки заряды $\pm q$. Потенциал положительной обкладки обозначим через φ_+ , потенциал отрицательной через φ_- . Ёмкость конденсатора равна:

$$C = \frac{q}{V},$$

где V — напряжение на конденсаторе:

$$V = \varphi_+ - \varphi_-$$

Пусть заряды на пластинах плоского конденсатора равны $\pm q_1$, а заряды на шариках $\pm q_2$. Пренебрегая зарядами на соединительных проводах, имеем:

$$q = q_1 + q_2 \,.$$

Каждая обкладка сложного конденсатора представляет собой единый проводник, потенциал которого одинаков во всех его точках. Поэтому потенциалы пластин плоского конденсатора равны $\varphi_\pm$ и напряжение на плоском конденсаторе равно V . Тогда заряд q_1 равен:

$$q_1 = C_0 V \,,$$

Потенциалы шариков также равны $\varphi_\pm$. Так как шарики и пластины расположены далеко друг от друга, то

$$\varphi_\pm = \pm\frac{kq_2}{R} \quad \rightarrow \quad V = \frac{2kq_2}{R} \quad \rightarrow \quad q_2 = \frac{VR}{2k}\,.$$

Окончательно получаем:

$$q = C_0 V + \frac{VR}{2k} = \left(C_0 + \frac{R}{2k}\right) V \quad \rightarrow \quad C = \frac{q}{V} = C_0 + \frac{R}{2k}\,.$$

После подлючения конденсатора к батарее на нём устанавливается напряжение ε и заряд $q = C\varepsilon$. Приращенние энергии конденсатора ΔU и работа батареи A равны:

$$\Delta U = \frac{C\varepsilon^2}{2}\,, \quad A = q\varepsilon = C\varepsilon^2\,.$$

Количество теплоты находим из уравнения баланса энергии:

$$A = \Delta U + Q \quad \to \quad Q = A - \Delta U = \frac{C\varepsilon^2}{2} = \left(C_0 + \frac{R}{2k}\right)\frac{\varepsilon^2}{2} = 0{,}36 \text{ нДж}$$

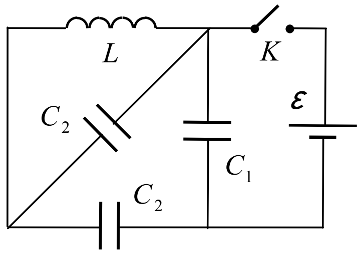
Ответ:

$$Q = \left(C_0 + \frac{R}{2k}\right)\frac{\varepsilon^2}{2} = 0{,}36 \text{ нДж}$$

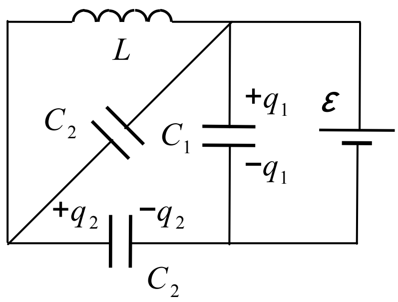
Критерии

1. Правильно найдены заряды шариков и обкладок плоского конденсатора (+2 балла).
2. Правильно найдены потенциалы обкладок (+1 балл).
3. Правильно найдена ёмкость сложного конденсатора (+1 балл).
4. Правильно записано уравнение баланса энергии (+1 балл).
5. Правильно найдены приращение энергии конденсатора и работа батареи (+2 балла).
6. Получен правильный буквенный ответ (+2 балла).
7. Получен правильный числовой ответ (+1 балл).

Задача 5. Электрическая цепь состоит из ключа K, катушки индуктивностью $L = 64$ мкГн, одного конденсатора ёмкостью $C_1 = 0{,}4$ нФ, двух конденсаторов ёмкостью $C_2 = 1{,}2$ нФ и батареи с ЭДС $\varepsilon = 12$ В. Сначала ключ разомкнут и конденсаторы не заряжены. Пренебрегая излучением и сопротивлением всех элементов цепи, найдите максимальное значение I_m тока в катушке после замыкания ключа.



Возможное решение



Поскольку в правом контуре нет индуктивности и сопротивление всех элементов цепи предполагается очень малым, можно считать, что сразу после замыкания ключа на конденсаторах устанавливаются некоторые начальные заряды q_1 и q_2. При этом, из–за действия ЭДС самоиндукции, ток через катушку всё ещё равен нулю. Учитывая, что напряжение на каждом из конденсаторов C_2 равно $\varepsilon/2$, получаем:

$$q_1 = C_1\,\varepsilon\,, \quad q_2 = \frac{C_2\,\varepsilon}{2}\,.$$

После установления на конденсаторах зарядов q_1 и q_2 ток через катушку начинает расти. ЭДС самоиндукции ε_s, возникающая в катушке, пропорциональна скорости изменения тока:

$$\varepsilon_s = -L\,\frac{\Delta\,I}{\Delta\,t}\,.$$

В те моменты времени, когда ток максимален, скорость его изменения обращается в нуль. По этой причине ЭДС самоиндукции также равна нулю, включенный по диагонали конденсатор C_2 не заряжен, и напряжение на каждом из двух оставшихся конденсаторах равно ε. Заряд конденсатора C_1 по–прежнему равен q_1, заряд нижнего конденсатора C_2 равен

$$q'_2 = C_2\,\varepsilon\,.$$

Для того чтобы найти максимальное значение тока в катушке, запишем уравнение баланса энергии:

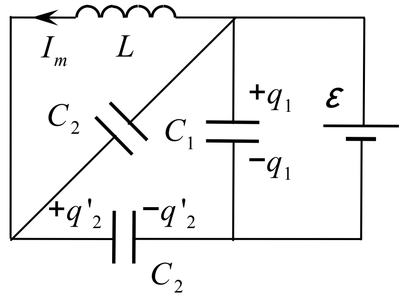
$$A = \Delta\,W + \frac{LI_m^2}{2}\,.$$

Здесь A — работа батареи, $\Delta\,W$ — приращение энергии конденсаторов:

$$\Delta\,W = W_2 - W_1\,,$$

W_1 и W_2 — начальная и конечная энергии. Работа A равна:

$$A = \Delta\,q\,\varepsilon\,,$$



где Δq — заряд, прошедший через батарею в направлении действия её ЭДС. Так как заряд конденсатора C_1 не изменился, Δq определяется зарядами отрицательной обкладки нижнего конденсатора C_2. Получаем:

$$-q_2 - \Delta q = -q'_2 \quad \to \quad \Delta q = q'_2 - q_2 = \frac{C_2 \varepsilon}{2}, \quad A = \frac{C_2 \varepsilon^2}{2}.$$

Для энергий имеем:

$$W_1 = \frac{C_1 \varepsilon^2}{2} + 2\,\frac{C_2 (\varepsilon/2)^2}{2} = \frac{C_1 \varepsilon^2}{2} + \frac{C_2 \varepsilon^2}{4},$$

$$W_2 = \frac{C_1 \varepsilon^2}{2} + \frac{C_2 \varepsilon^2}{2}, \quad \Delta W = \frac{C_2 \varepsilon^2}{4}.$$

Из полученных соотношений находим ток I_m:

$$\frac{L I_m^2}{2} = A - \Delta W = \frac{C_2 \varepsilon^2}{4} \quad \to \quad I_m = \varepsilon \sqrt{\frac{C_2}{2L}} = 36{,}7 \text{ мА}$$

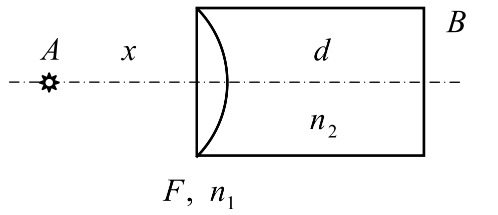
Ответ:

$$I_m = \varepsilon \sqrt{\frac{C_2}{2L}} = 36{,}7 \text{ мА}$$

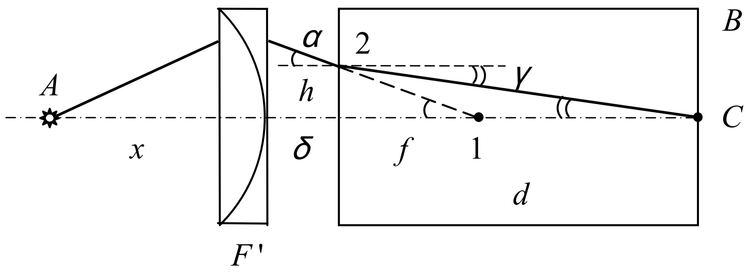
Критерии

1. Правильно найдены начальные заряды конденсаторов (+2 балла).
2. Указано, что при максимальном токе через катушку ЭДС самоиндукции обращается в нуль (+1 балл).
3. Правильно найдены заряды конденсаторов при максимальном токе (+1 балл).
4. Правильно записано уравнение баланса энергии (+1 балл).
5. Правильно найдены приращение энергии конденсаторов и работа батареи (+2 балла).
6. Получен правильный буквенный ответ (+2 балла).
7. Получен правильный числовой ответ (+1 балл).

Задача 6. Левый торец кругового цилиндра закрыт тонкой плосковыпуклой стеклянной линзой, обращённой выпуклой стороной внутрь цилиндра. Главная оптическая ось линзы совпадает с осью цилиндра, фокусное расстояние линзы в воздухе $F = 12$ см, показатель преломления стекла $n_1 = 1{,}8$. Правый торец цилиндра закрыт экраном B, изготовленным из тонкого матового стекла. Расстояние от линзы до экрана $d = 50$ см. Внутри цилиндр заполнен жидкостью с показателем преломления $n_2 = 1{,}4$. Слева от линзы, на её оптической оси, находится точечный источник света A, изображение которого получено на матовом экране. Найдите расстояние x от источника света до линзы.



Возможное решение



Мысленно проведём через вершину стеклянной линзы плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. В результате получим систему двух соприкасающихся линз, одна из которых — исходная стеклянная линза, а другая — плосковогнутая рассеивающая линза, заполненная жидкостью. Для того чтобы найти фокусное расстояние F' составной системы в воздухе, воспользуемся тем фактом, что оптические силы соприкасающихся линз складываются:

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{F} - \frac{n_2 - 1}{R}.$$

Здесь R — радиус кривизны выпуклой поверхности стеклянной линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{n_1 - 1}{R}.$$

Выражая отсюда радиус R и подставляя его в формулу для F', получаем:

$$F' = \frac{(n_1 - 1)F}{n_1 - n_2}.$$

Фокусное расстояние F' положительно. Поэтому рассмотренная составная линза является собирающей.

Пусть луч света, испущенный источником A вдоль оси цилиндра, попадает в точку C экрана. Рассмотрим произвольный луч, испущенный под малым углом к оси. Требуется подобрать расстояние x между источником и стеклянной линзой так, чтобы этот луч также попал в точку C. Тогда точка C будет изображением источника.

Будем считать, что составная линза отделена от цилиндра с жидкостью тонким воздушным зазором шириной δ. В конечных результатах эту ширину следует положить равной нулю. Рассмотрим прохождение луча через составную линзу. Если бы за линзой не было жидкости, то луч пересёк бы ось цилиндра в точке 1. Обозначим расстояние от линзы до этой точки через f и запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F'}.$$

Рассмотрим дополнительное преломление луча в точке 2, лежащей на плоской границе раздела воздух–жидкость. Обозначим через α и γ углы падения и преломления. По закону преломления имеем:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_2\,.$$

Угол α следует считать малым, поскольку только в этом случае справедлива стандартная формула линзы. Из закона преломления следует, что угол γ также мал. Заменяя синусы на углы, получаем:

$$\alpha = n_2\gamma\,.$$

Обозначим через h расстояние от точки 2 до оси цилиндра. Тогда

$$\alpha \approx \text{tg}\alpha = \frac{h}{f-\delta}\,, \quad \gamma \approx \text{tg}\gamma = \frac{h}{d} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{f-\delta} = \frac{n_2}{d}\,.$$

Полагая $\delta = 0$ и подставляя $1/f$ в формулу линзы, находим расстояние x:

$$x = \frac{(\,n_1-1\,)\,Fd}{(\,n_1-n_2\,)\,d - n_2\,(\,n_1-1\,)\,F} = 73\ \text{см}$$

Ответ:

$$x = \frac{(\,n_1-1\,)\,Fd}{(\,n_1-n_2\,)\,d - n_2\,(\,n_1-1\,)\,F} = 73\ \text{см}$$

Критерии

1. Исходная стеклянная линза заменена составной линзой (+2 балла).
2. Правильно найдено фокусное рассстояние составной линзы (+2 балла).
3. Правильно записана формула линзы (+1 балл).
4. Правильно рассмотрено преломление на плоской границе (+2 балла).
5. Получен правильный буквенный ответ (+2 балла).
6. Получен правильный числовой ответ (+1 балл).