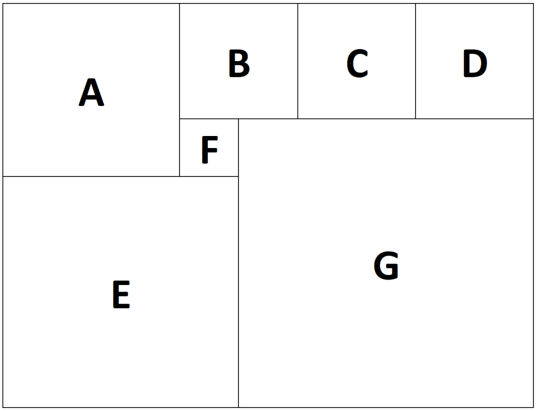
Олимпиада школьников «Курчатов-2022» по математике. Отборочный этап.

Содержание

6-7 классы

Задача 1.1. Прямоугольник разрезан на семь квадратов, как изображено на рисунке. Известно, что длина стороны квадрата D равна 24. Найдите длины сторон квадратов E и G.



Решение. Пусть длина стороны квадрата F равна x. Тогда длина стороны квадрата A равна $x+24$ (сумма длин B и F), длина стороны E равна $2x+24$ (сумма длин A и F), длина стороны G равна $3x+24$ (сумма длин E и F). С другой стороны, сумма длин сторон G и F в три раза больше длины стороны D. Получается уравнение

$$(3x + 24) + x = 3 \cdot 24;$$

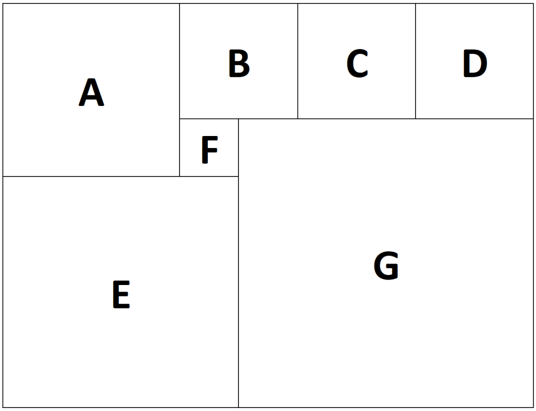
$$4x = 48;$$

$$x = 12.$$

Следовательно, длина стороны квадрата E равна $2 \cdot 12 + 24 = 48$, а длина стороны квадрата G равна $3 \cdot 12 + 24 = 60$. $\square$

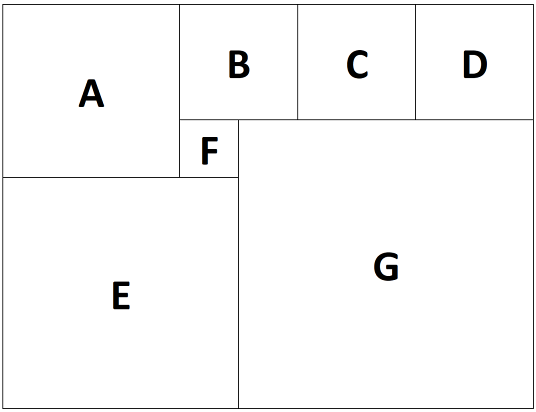
Ответ: Длина стороны квадрата E равна 48, а сторона квадрата G равна 60.

Задача 1.2. Прямоугольник разрезан на семь квадратов, как изображено на рисунке. Известно, что длина стороны квадрата D равна 28. Найдите длины сторон квадратов E и G.



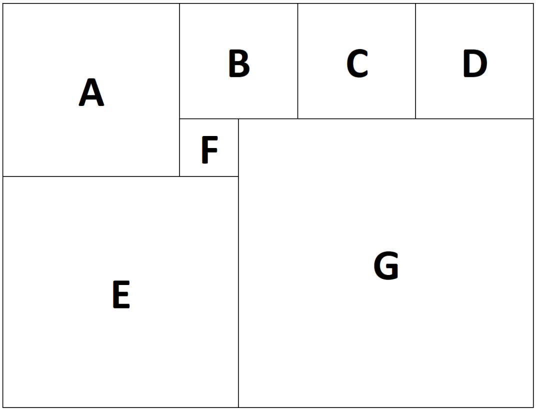
Ответ: Длина стороны квадрата E равна 56, а сторона квадрата G равна 70.

Задача 1.3. Прямоугольник разрезан на семь квадратов, как изображено на рисунке. Известно, что длина стороны квадрата D равна 32. Найдите длины сторон квадратов E и G.



Ответ: Длина стороны квадрата E равна 64, а сторона квадрата G равна 80.

Задача 1.4. Прямоугольник разрезан на семь квадратов, как изображено на рисунке. Известно, что длина стороны квадрата D равна 16. Найдите длины сторон квадратов E и G.



Ответ: Длина стороны квадрата E равна 32, а сторона квадрата G равна 40.

Задача 2.1. Найдите наибольшее четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, произведение двух крайних цифр которого в два раза больше произведения двух средних цифр.

Решение. Будем искать числа, удовлетворяющие условиям задачи, начинающиеся на цифру 9. Если такие числа существуют, наибольшее из них будет ответом к задаче.

Произведение первой и последней цифр вдвое больше произведения средних цифр. Если в одном из этих произведений есть множитель, равный 0, то он должен быть и в другом произведении, что противоречит условию о различности цифр. Значит, цифры числа принимают значения от 1 до 9.

Если первая цифра числа равна 9, то оба произведения делятся на 9. Произведение средних цифр, принимающих значения от 1 до 8, делится на 9 только в случае, если эти цифры — 3 и 6. Значит, есть ровно два числа, начинающихся на 9: это 9364 и 9634. Наибольшее из них 9634 и является искомым. □

Ответ: 9634.

Задача 2.2. Найдите наибольшее четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, произведение двух крайних цифр которого в два раза меньше произведения двух средних цифр.

Ответ: 9631.

Задача 2.3. Найдите наибольшее четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, произведение двух крайних цифр которого в четыре раза больше произведения двух средних цифр.

Ответ: 9638.

Задача 3.1. Маша купила на рынке несколько фруктов: яблок, груш и слив. Среди них груш было больше, чем яблок, и больше, чем слив. Придя домой, она положила фрукты в угол и забыла про них. Когда через несколько дней она вспомнила про свою покупку, некоторые фрукты успели сгнить, и Маше с сожалением пришлось их выбросить.

Маша заметила, что испорченных груш было в два раза больше, чем испорченных яблок, а испорченных слив — в три раза больше, чем испорченных яблок. Пересчитав оставшиеся фрукты, Маша убрала в холодильник 18 яблок, 14 груш и 7 слив — все фрукты, которые не испортились. Сколько суммарно фруктов Маша могла купить изначально? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 69, 75.

Решение. Пусть испорченных яблок было x, тогда испорченных груш было $2x$, а испорченных слив — $3x$. Поскольку груш изначально было больше всего, то $18 + x < 14 + 2x$ и $7 + 3x < 14 + 2x$. Решая эти неравенства, получаем, что $4 < x < 7$. Поскольку x является целым числом, $x = 5$ или $x = 6$. Значит, всего Маша купила $(18+5)+(14+10)+(7+15) = 69$ или $(18+6)+(14+12)+(7+18) = 75$ фруктов. □

Задача 3.2. Маша купила на рынке несколько фруктов: яблок, груш и слив. Среди них груш было больше, чем яблок, и больше, чем слив. Придя домой, она положила фрукты в угол и забыла про них. Когда через несколько дней она вспомнила про свою покупку, некоторые фрукты успели сгнить, и Маше с сожалением пришлось их выбросить.

Маша заметила, что испорченных груш было в два раза больше, чем испорченных яблок, а испорченных слив — в три раза больше, чем испорченных яблок. Пересчитав оставшиеся фрукты, Маша убрала в холодильник 19 яблок, 15 груш и 8 слив — все фрукты, которые не испортились. Сколько суммарно фруктов Маша могла купить изначально? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 72, 78.

Задача 3.3. Маша купила на рынке несколько фруктов: яблок, груш и слив. Среди них груш было больше, чем яблок, и больше, чем слив. Придя домой, она положила фрукты в угол и забыла про них. Когда через несколько дней она вспомнила про свою покупку, некоторые фрукты успели сгнить, и Маше с сожалением пришлось их выбросить.

Маша заметила, что испорченных груш было в два раза больше, чем испорченных яблок, а испорченных слив — в три раза больше, чем испорченных яблок. Пересчитав оставшиеся фрукты, Маша убрала в холодильник 20 яблок, 16 груш и 9 слив — все фрукты, которые не испортились. Сколько суммарно фруктов Маша могла купить изначально? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 75, 81.

Задача 3.4. Маша купила на рынке несколько фруктов: яблок, груш и слив. Среди них груш было больше, чем яблок, и больше, чем слив. Придя домой, она положила фрукты в угол и забыла про них. Когда через несколько дней она вспомнила про свою покупку, некоторые фрукты успели сгнить, и Маше с сожалением пришлось их выбросить.

Маша заметила, что испорченных груш было в два раза больше, чем испорченных яблок, а испорченных слив — в три раза больше, чем испорченных яблок. Пересчитав оставшиеся фрукты, Маша убрала в холодильник 17 яблок, 13 груш и 6 слив — все фрукты, которые не испортились. Сколько суммарно фруктов Маша могла купить изначально? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 66, 72.

Задача 4.1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 63 жителя острова пришли на концерт, где заняли места с номерами от 1 до 63.

После представления все по очереди высказались.

- Человек, занимавший 1 место, сказал: «Мне понравился концерт».
- Человек, занимавший 2 место, сказал: «Мне понравился концерт».

Далее все говорили одну и ту же фразу.

- Человек, занимавший 3 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».
- Человек, занимавший 4 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».
- ...
- Человек, занимавший 63 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».

Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 63 жителей?

Ответ: 22.

Решение. Разделим всех людей на тройки подряд идущих:

- первая тройка — люди, занимавшие места 1, 2, 3;
- вторая тройка — люди, занимавшие места 4, 5, 6;
- ...
- двадцать первая тройка — люди, занимавшие места 61, 62, 63.

Рыцарей в первой тройке не более двух, а во всех остальных тройках — не более одного. Значит, всего рыцарей не более 22.

Пример построить нетрудно: рыцари могли занимать первое и второе места (им концерт понравился), а также все места, номера которых дают остаток 2 при делении на 3 (РРЛ ЛРЛ ЛРЛ ... ЛРЛ). В этом случае все рыцари сказали правду, а все лжецы — солгали. □

Задача 4.2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 69 жителей острова пришли на концерт, где заняли места с номерами от 1 до 69.

После представления все по очереди высказались.

- Человек, занимавший 1 место, сказал: «Мне понравился концерт».
- Человек, занимавший 2 место, сказал: «Мне понравился концерт».

Далее все говорили одну и ту же фразу.

- Человек, занимавший 3 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».
- Человек, занимавший 4 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».
- ...
- Человек, занимавший 69 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».

Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 69 жителей?

Ответ: 24.

Задача 4.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 66 жителей острова пришли на концерт, где заняли места с номерами от 1 до 66.

После представления все по очереди высказались.

- Человек, занимавший 1 место, сказал: «Мне понравился концерт».

- Человек, занимавший 2 место, сказал: «Мне понравился концерт».

Далее все говорили одну и ту же фразу.

- Человек, занимавший 3 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».
- Человек, занимавший 4 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».
- ...
- Человек, занимавший 66 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».

Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 66 жителей?

Ответ: 23.

Задача 4.4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 54 жителя острова пришли на концерт, где заняли места с номерами от 1 до 54.

После представления все по очереди высказались.

- Человек, занимавший 1 место, сказал: «Мне понравился концерт».
- Человек, занимавший 2 место, сказал: «Мне понравился концерт».

Далее все говорили одну и ту же фразу.

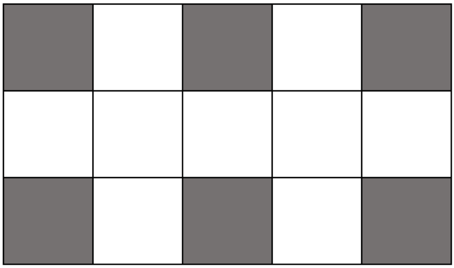
- Человек, занимавший 3 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».
- Человек, занимавший 4 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».
- ...
- Человек, занимавший 54 место, сказал: «Предыдущие два человека соврали».

Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 54 жителей?

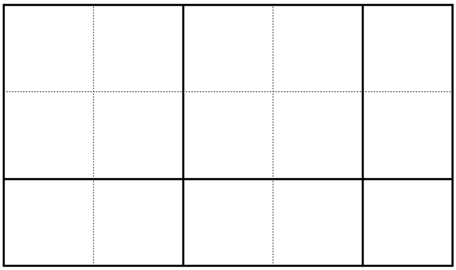
Ответ: 19.

Задача 5.1. Два пирата Джон и Билли делят клад из 180 золотых монет. Джон рисует на песке таблицу 3×5 и раскладывает все монеты в её клетки (возможно, оставляя некоторые клетки пустыми). Затем Билли забирает себе все монеты из каких-нибудь четырёх клеток таблицы, образующих квадрат 2×2. Какое наибольшее количество золотых монет может гарантированно забрать себе Билли?

Решение. Заметим, что если Джон разложит по 30 монет в шесть закрашенных клеток (см. рисунок), то Билли сможет забрать не более 30 монет.



Теперь докажем, что Билли всегда сможет забрать хотя бы 30 монет. Разделим таблицу на 6 областей (см. рисунок). Заметим, что как бы Джон ни раскладывал монеты, в одной из этих областей будет хотя бы 30 монет. А так как для любой из этих областей существует квадрат 2×2, её содержащий, Билли сможет забрать эти монеты.



$\square$

Ответ: 30.

Задача 5.2. Два пирата Джон и Билли делят клад из 120 золотых монет. Джон рисует на песке таблицу 3×5 и раскладывает все монеты в её клетки (возможно, оставляя некоторые клетки пустыми). Затем Билли забирает себе все монеты из каких-нибудь четырёх клеток таблицы, образующих квадрат 2×2. Какое наибольшее количество золотых монет может гарантированно забрать себе Билли?

Ответ: 20.

Задача 5.3. Два пирата Джон и Билли делят клад из 240 золотых монет. Джон рисует на песке таблицу 3×5 и раскладывает все монеты в её клетки (возможно, оставляя некоторые клетки пустыми). Затем Билли забирает себе все монеты из каких-нибудь четырёх клеток таблицы, образующих квадрат 2×2. Какое наибольшее количество золотых монет может гарантированно забрать себе Билли?

Ответ: 40.

Задача 5.4. Два пирата Джон и Билли делят клад из 360 золотых монет. Джон рисует на песке таблицу 3×5 и раскладывает все монеты в её клетки (возможно, оставляя некоторые клетки пустыми). Затем Билли забирает себе все монеты из каких-нибудь четырёх клеток таблицы, образующих квадрат 2×2. Какое наибольшее количество золотых монет может гарантированно забрать себе Билли?

Ответ: 60.

Задача 6. Андрей выписывает к себе в блокнот все трёхзначные числа, у которых первая цифра на 2 меньше, чем сумма двух последних цифр.

Денис выписывает к себе в блокнот все трёхзначные числа, у которых последняя цифра на 2 меньше, чем сумма двух первых цифр.

Пусть Андрей себе выписал A чисел, а Денис себе выписал D чисел. Найдите $A - D$.

Решение. Каждому числу $\overline{abc}$ из блокнота Андрея мы поставим в соответствие число $\overline{cba}$ из блокнота Дениса.

Практически все числа из блокнотов ребят таким образом разбиваются на пары (и чисел, входящих в такие пары, у ребят поровну). Поймём, у каких чисел нет пары.

В блокноте Андрея нет пары у чисел вида $\overline{ab0}$, где $a + 2 = b$. Таких чисел всего семь: 790, 680, 570, 460, 350, 240, 130.

В блокноте Дениса нет пары у чисел вида $\overline{ab0}$, где $a + b = 2$. Таких чисел всего два: 110, 200.

Таких образом, $A - D = 7 - 2 = 5$. □

Ответ: 5.

8-9 классы

Задача 1.1. Алина загадала пятизначное число, состоящее из цифр $1, 2, 3, 4, 5$ (каждая цифра встречается в числе ровно один раз), а Полина пытается это число угадать.

Между девочками состоялся следующий диалог:

- Полина: «Ты загадала число 12345?»
- Алина: «Нет, но моё число совпадает с 12345 ровно в трёх разрядах».
- Полина: «Может быть, ты загадала число 45213?»
- Алина: «А вот с 45213 моё число совпадает ровно в двух разрядах».

Какое число загадала Алина?

Решение. Заметим, что числа 12345 и 45213 не совпадают ни в одном разряде, поэтому число Алины совпадает с числом 45213 ровно в тех двух разрядах, в которых различается с числом 12345. Единственные два разряда, удовлетворяющие данному свойству, это 1 и 4. Получаем, что Алина могла загадать только 42315. □

Ответ: 42315.

Задача 1.2. Алина загадала пятизначное число, состоящее из цифр $1, 2, 3, 4, 5$ (каждая цифра встречается в числе ровно один раз), а Полина пытается это число угадать.

Между девочками состоялся следующий диалог:

- Полина: «Ты загадала число 12345?»
- Алина: «Нет, но моё число совпадает с 12345 ровно в трёх разрядах».
- Полина: «Может быть, ты загадала число 34521?»
- Алина: «А вот с 34521 моё число совпадает ровно в двух разрядах».

Какое число загадала Алина?

Ответ: 14325.

Задача 2.1. Дан треугольник ABC. Точки K и L — середины сторон AB и BC соответственно. Оказалось, что биссектрисы углов AKL и CLK пересекаются на отрезке AC. Найдите длину отрезка AC, если известно, что $AB = 17$ и $BC = 24$.

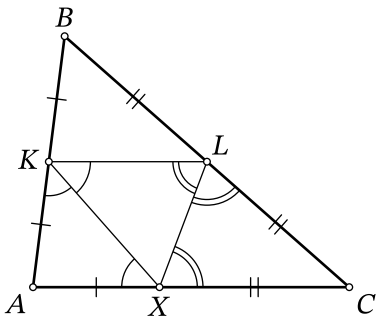


Рис. 1: к решению задачи 2.1

Решение. Пусть X — точка пересечения биссектрис углов AKL и CLK, лежащая на стороне AC (рис 1). Отрезок KL является средней линией треугольника ABC, поэтому $KL \parallel AC$. Отсюда $\angle AKX = \angle LKX = \angle AXK$, т. е. треугольник AXK — равнобедренный, $AX = AK = \frac{AB}{2}$. Аналогично треугольник CXL — равнобедренный, $CX = CL = \frac{BC}{2}$. Тогда

$$AC = AX + XC = \frac{AB + BC}{2} = \frac{17 + 20}{2} = 20{,}5. \qquad \square$$

Ответ: 20,5.

Задача 2.2. Дан треугольник ABC. Точки K и L — середины сторон AB и BC соответственно. Оказалось, что биссектрисы углов AKL и CLK пересекаются на отрезке AC. Найдите длину отрезка AC, если известно, что $AB = 17$ и $BC = 22$.

Ответ: 19,5.

Задача 2.3. Дан треугольник ABC. Точки K и L — середины сторон AB и BC соответственно. Оказалось, что биссектрисы углов AKL и CLK пересекаются на отрезке AC. Найдите длину отрезка AC, если известно, что $AB = 17$ и $BC = 26$.

Ответ: 21,5.

Задача 2.4. Дан треугольник ABC. Точки K и L — середины сторон AB и BC соответственно. Оказалось, что биссектрисы углов AKL и CLK пересекаются на отрезке AC. Найдите длину отрезка AC, если известно, что $AB = 19$ и $BC = 26$.

Ответ: 22,5.

Задача 3.1. Миша купил несколько фруктов: яблок и апельсинов. Оказалось, что если бы он купил вдвое больше яблок, апельсинов всё равно было бы больше. А если бы он купил вдвое больше апельсинов, а яблок на 18 больше, то яблок было бы больше. Сколько яблок и сколько апельсинов купил Миша, если суммарно их было больше 15?

Решение. Обозначим количество яблок за x, а количество апельсинов за y. По условию

$$2x < y, \quad x + 18 > 2y, \quad x + y > 15.$$

Все числа являются целыми, поэтому

$$2x + 1 \leqslant y, \quad x + 18 \geqslant 2y + 1, \quad x + y \geqslant 16.$$

Домножив второе неравенство на 2 и применив первое неравенство, получим следующую цепочку:

$$y + 35 \geqslant 2x + 36 \geqslant 4y + 2,$$

откуда следует, что $3y \leqslant 33$ и $y \leqslant 11$. Подставив этот результат в первое неравенство, получим $x \leqslant 5$. Наконец, из условия $x + y \geqslant 16$ следует, что $x = 5$ и $y = 11$. □

Ответ: 5 яблок, 11 апельсинов.

Задача 3.2. Миша купил несколько фруктов: яблок и апельсинов. Оказалось, что если бы он купил вдвое больше яблок, апельсинов всё равно было бы больше. А если бы он купил вдвое больше апельсинов, а яблок на 21 больше, то яблок было бы больше. Сколько яблок и сколько апельсинов купил Миша, если суммарно их было больше 18?

Ответ: 6 яблок, 13 апельсинов.

Задача 3.3. Миша купил несколько фруктов: яблок и апельсинов. Оказалось, что если бы он купил вдвое больше яблок, апельсинов всё равно было бы больше. А если бы он купил вдвое больше апельсинов, а яблок на 24 больше, то яблок было бы больше. Сколько яблок и сколько апельсинов купил Миша, если суммарно их было больше 21?

Ответ: 7 яблок, 15 апельсинов.

Задача 3.4. Миша купил несколько фруктов: яблок и апельсинов. Оказалось, что если бы он купил вдвое больше яблок, апельсинов всё равно было бы больше. А если бы он купил вдвое больше апельсинов, а яблок на 27 больше, то яблок было бы больше. Сколько яблок и сколько апельсинов купил Миша, если суммарно их было больше 24?

Ответ: 8 яблок, 17 апельсинов.

Задача 4.1. На доске написан квадратный трёхчлен $P(x)$. Ваня заметил, что

- если из $P(x)$ вычесть x^2, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень;
- если из $P(x)$ вычесть x, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень;
- если из $P(x)$ вычесть 1, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень.

Найдите $P(8)$.

Решение. Обозначим $P(x) = ax^2 + bx + c$. Квадратный трёхчлен имеет ровно один действительный корень тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Запишем дискриминанты трёхчленов $P(x) - x^2$, $P(x) - x$, $P(x) - 1$, равные нулю:

$$b^2 - 4(a-1)c = b^2 - 4ac + 4c = 0;$$

$$(b-1)^2 - 4ac = b^2 - 4ac + 1 - 2b = 0;$$

$$b^2 - 4a(c-1) = b^2 - 4ac + 4a = 0.$$

Получаем, что $4c = 1 - 2b = 4a$. Домножим на 4 равенство со вторым дискриминантом и подставим в него $16ac = 4a \cdot 4c = (1-2b)^2$, получим

$$4b^2 - (1-2b)^2 + 4 - 8b = 0.$$

Отсюда находим $b = \frac{3}{4}$, поэтому $a = c = -\frac{1}{8}$. Следовательно, $P(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ и

$$P(8) = -\frac{1}{8} \cdot 8^2 + \frac{3}{4} \cdot 8 - \frac{1}{8} = -8 + 6 - \frac{1}{8} = -2{,}125. \qquad \square$$

Ответ: $-\frac{17}{8} = -2{,}125$.

Задача 4.2. На доске написан квадратный трёхчлен $P(x)$. Ваня заметил, что

- если из $P(x)$ вычесть x^2, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень;
- если из $P(x)$ вычесть x, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень;
- если из $P(x)$ вычесть 1, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень.

Найдите $P(4)$.

Ответ: $\frac{7}{8} = 0{,}875$.

Задача 4.3. На доске написан квадратный трёхчлен $P(x)$. Ваня заметил, что

- если из $P(x)$ вычесть x^2, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень;
- если из $P(x)$ вычесть x, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень;
- если из $P(x)$ вычесть 1, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень.

Найдите $P(12)$.

Ответ: $-\frac{73}{8} = -9{,}125$.

Задача 4.4. На доске написан квадратный трёхчлен $P(x)$. Ваня заметил, что

- если из $P(x)$ вычесть x^2, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень;
- если из $P(x)$ вычесть x, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень;
- если из $P(x)$ вычесть 1, то получится квадратный трёхчлен, имеющий ровно один действительный корень.

Найдите $P(16)$.

Ответ: $-\frac{161}{8} = -20{,}125$.

Задача 5.1. Артём загадал натуральное число $N \leqslant 12$. Вася может назвать натуральное число M, после чего Артём сообщит ему, чему равен наибольший общий делитель чисел M и N. Найдите наименьшее возможное значение M, при котором Вася по такому ответу гарантированно сможет узнать число N.

Решение. Докажем, что $\text{НОД}(M, k) = k$ для всех $1 \leqslant k \leqslant 12$. Предположим, что это неверно. Выберем наименьшее k, для которого это не выполняется. Пусть $\text{НОД}(M, k) = l \neq k$. Поскольку l является делителем k, то $l < k$. Но тогда $\text{НОД}(M, k) = \text{НОД}(M, l) = l$, и в случае, если Артём ответит число l, Вася не сможет гарантированно определить загаданное число (оно может быть равно и k, и l). Противоречие.

Итак, $\text{НОД}(M, k) = k$ для всех $1 \leqslant k \leqslant 12$, т. е. M делится на все числа от 1 до 12. Наименьшее такое число равно наименьшему общему кратному чисел от 1 до 12, т. е. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$. Очевидно, такое число подходит под условие, ведь для разных возможных значений N получаются разные ответы Артёма. $\square$

Ответ: 27720.

Задача 5.2. Артём загадал натуральное число $N \leqslant 11$. Вася может назвать натуральное число M, после чего Артём сообщит ему, чему равен наибольший общий делитель чисел M и N. Найдите наименьшее возможное значение M, при котором Вася по такому ответу гарантированно сможет узнать число N.

Ответ: 27720.

Задача 6.1. В каждой клетке полоски 1×61 стоит либо плюс, либо минус. Таня выбирает любые три клетки и меняет три знака в них на противоположные. А Саша выбирает любые три последовательных клетки и меняет три знака в них на противоположные.

Изначально во всех клетках стояли минусы. Таня и Саша делают ходы по очереди, начинает Таня. Какого наибольшего количества плюсов может добиться Таня после какого-нибудь своего хода?

Решение. Сначала покажем, что Таня после некоторого своего хода может добиться 43 плюсов. Пронумеруем клетки в полоске по порядку числами от 1 до 61. Пусть Таня своим ходом изменяет 3 минуса в клетках с номерами, не кратными 3 (если там все плюсы, то она меняет любые другие знаки). Заметим, что своим ходом Саша может поменять только 2 знака в этих клетках (ведь среди любых трёх подряд идущих клеток обязательно есть клетка с номером, кратным 3). Получаем, что своим ходом Таня увеличивает количество плюсов в этих клетках на 3 (либо же после её хода там окажутся все плюсы), а Саша уменьшает максимум на 2, поэтому после некоторого хода Тани на всех этих клетках окажутся плюсы. Следующим ходом Саша опять меняет не более двух плюсов на этих клетках, а Таня в свою очередь меняет минусы в этих клетках и ещё хотя бы в одной другой (с номером, кратным 3). Таким образом, плюсов окажется хотя бы $41 + 1 = 42$. Осталось заметить, что после каждого хода любого игрока меняется чётность количества плюсов в полоске, и после хода Тани оно всегда нечётное, поэтому всего плюсов будет хотя бы 43.

Теперь покажем, что Саша может играть так, чтобы после любого хода Тани было не более 43 плюсов. Рассмотрим три случая.

- Пусть перед ходом Саши есть три плюса подряд. В этом случае Саша просто меняет их на минусы. Количество плюсов уменьшается на 3.
- Пусть перед ходом Саши нет трёх плюсов подряд, но есть два плюса подряд. В этом случае Саша меняет их на минусы, а в следующей за ними клетке минус меняет на плюс. Количество плюсов уменьшается на 1.

- Пусть перед ходом Саши нет двух плюсов подряд. В этом случае всего плюсов не более 21. Действительно, разбив всю полоску на 20 групп по 3 последовательных клетки и ещё 1 группу из 1 клетки, получаем, что в каждой группе не более одного плюса. Саша делает любой ход, после чего количество плюсов становится не более 24.

Докажем, что Саша, придерживаясь такой стратегии, после каждого своего хода будет оставлять не более 40 плюсов. Отсюда будет следовать, что Таня не сможет добиться более 43 плюсов.

Если перед ходом Саши всего не более 41 плюса, то после его хода плюсов будет не более 40 (либо он уменьшит их количество, либо их станет не более 24). Рассмотрим момент, когда перед его ходом 42 или 43 плюса (больше быть не может, т. к. до этого момента он всегда оставлял Тане не более 40). В этом случае обязательно найдётся 3 плюса подряд (иначе, если нет трёх плюсов подряд, разбив всю полоску на 20 групп по 3 последовательных клетки и ещё 1 группу из 1 клетки, получаем, что в каждой группе не более двух плюсов и ещё в отдельной клетке не более одного, поэтому всего плюсов было бы не более $20 \cdot 2+1 = 41$, что неверно). После смены этих последовательных плюсов на минусы количество плюсов будет не более 40. $\square$

Ответ: 43.

Задача 6.2. В каждой клетке полоски 1×67 стоит либо плюс, либо минус. Таня выбирает любые три клетки и меняет три знака в них на противоположные. А Саша выбирает любые три последовательных клетки и меняет три знака в них на противоположные.

Изначально во всех клетках стояли минусы. Таня и Саша делают ходы по очереди, начинает Таня. Какого наибольшего количества плюсов может добиться Таня после какого-нибудь своего хода?

Ответ: 47.

Задача 6.3. В каждой клетке полоски 1×73 стоит либо плюс, либо минус. Таня выбирает любые три клетки и меняет три знака в них на противоположные. А Саша выбирает любые три последовательных клетки и меняет три знака в них на противоположные.

Изначально во всех клетках стояли минусы. Таня и Саша делают ходы по очереди, начинает Таня. Какого наибольшего количества плюсов может добиться Таня после какого-нибудь своего хода?

Ответ: 51.

Задача 6.4. В каждой клетке полоски 1×55 стоит либо плюс, либо минус. Таня выбирает любые три клетки и меняет три знака в них на противоположные. А Саша выбирает любые три последовательных клетки и меняет три знака в них на противоположные.

Изначально во всех клетках стояли минусы. Таня и Саша делают ходы по очереди, начинает Таня. Какого наибольшего количества плюсов может добиться Таня после какого-нибудь своего хода?

Ответ: 39.

10-11 классы

Задача 1.1. Пусть $S_n = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \ldots + \cos n^\circ$. Найдите наименьшее натуральное число $n > 37$, для которого $S_n < S_{37}$.

Решение. Ясно, что значение выражения $\cos k^\circ$ положительно для $0 < k < 90$, равно нулю для $k = 90$, отрицательно для $90 < k < 180$, причём $\cos(180^\circ - s^\circ) = -\cos s^\circ$ для любого s.

Заметим, что

$$S_{142} = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \ldots + \cos 142^\circ =$$

$$= S_{37} + (\cos 38^\circ + \cos 142^\circ) + (\cos 39^\circ + \cos 141^\circ) + \ldots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) + \cos 90^\circ =$$

$$= S_{37} + 0 + 0 + \ldots + 0 = S_{37}.$$

Для $37 < m \leqslant 90$ имеем $S_m = S_{37} + \cos 38^\circ + \ldots + \cos m^\circ \geqslant S_{37}$.

Для $90 < m \leqslant 141$ имеем $S_m = S_{142} - (\cos(m+1)^\circ + \ldots + \cos 142^\circ) \geqslant S_{142} = S_{37}$.

Для $m = 143$ имеем $S_m = S_{142} + \cos 143^\circ < S_{142} = S_{37}$. Следовательно, ответом к задаче является число 143. □

Ответ: 143.

Задача 1.2. Пусть $S_n = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \ldots + \cos n^\circ$. Найдите наименьшее натуральное число $n > 38$, для которого $S_n < S_{38}$.

Ответ: 142.

Задача 1.3. Пусть $S_n = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \ldots + \cos n^\circ$. Найдите наименьшее натуральное число $n > 39$, для которого $S_n < S_{39}$.

Ответ: 141.

Задача 1.4. Пусть $S_n = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \ldots + \cos n^\circ$. Найдите наименьшее натуральное число $n > 36$, для которого $S_n < S_{36}$.

Ответ: 144.

Задача 2.1. В мешке Деда Мороза лежат конфеты трёх видов: шоколадные, мармеладные и леденцы. Всего конфет в мешке 40, причём конфет каждого вида больше 2.

Снегурочка наугад вытаскивает из мешка две конфеты. Известно, что вероятность вытащить две шоколадные конфеты в 10 раз больше вероятности вытащить две мармеладные конфеты. Найдите вероятность вытащить два леденца.

Решение. Если среди 40 конфет ровно k какого-то вида, то вероятность вытащить две конфеты этого вида равна

$$\frac{\frac{k(k-1)}{2}}{\frac{40\cdot 39}{2}} = \frac{k(k-1)}{40\cdot 39}.$$

Пусть в мешке a шоколадных конфет и b мармеладных (a и b — натуральные числа, большие 2), тогда $a(a-1) = 10b(b-1)$. Переберём несколько случаев.

- Пусть $b = 3$, тогда $a(a-1) = 60$. Но 60 не является произведением двух последовательных натуральных чисел, противоречие.
- Пусть $b = 4$, тогда $a(a-1) = 120$. Но 120 не является произведением двух последовательных натуральных чисел, противоречие.
- Пусть $b = 5$, тогда $a(a-1) = 200$. Но 200 не является произведением двух последовательных натуральных чисел, противоречие.
- Пусть $b = 6$, тогда $a(a-1) = 300$. Но 300 не является произведением двух последовательных натуральных чисел, противоречие.
- Пусть $b = 7$, тогда $a(a-1) = 420$ и $a = 21$. Следовательно, в мешке $40 - 21 - 7 = 12$ леденцов, и вероятность вытащить два из них равна $\frac{12\cdot 11}{40\cdot 39} = \frac{11}{130}$.
- Пусть $b = 8$, тогда $a(a-1) = 560$. Но 560 не является произведением двух последовательных натуральных чисел, противоречие.
- Пусть $b = 9$, тогда $a(a-1) = 720$. Но 720 не является произведением двух последовательных натуральных чисел, противоречие.
- Пусть $b \geqslant 10$, тогда $a(a-1) \geqslant 900$. Отсюда следует, что $a \geqslant 31$, но тогда леденцов не могло бы быть больше 2, противоречие. □

Ответ: $\frac{11}{130}$.

Задача 2.2. В мешке Деда Мороза лежат конфеты трёх видов: шоколадные, мармеладные и леденцы. Всего конфет в мешке 41, причём конфет каждого вида больше 2.

Снегурочка наугад вытаскивает из мешка две конфеты. Известно, что вероятность вытащить две шоколадные конфеты в 10 раз больше вероятности вытащить две мармеладные конфеты. Найдите вероятность вытащить два леденца.

Ответ: $\frac{39}{410}$.

Задача 2.3. В мешке Деда Мороза лежат конфеты трёх видов: шоколадные, мармеладные и леденцы. Всего конфет в мешке 37, причём конфет каждого вида больше 2.

Снегурочка наугад вытаскивает из мешка две конфеты. Известно, что вероятность вытащить две шоколадные конфеты в 10 раз больше вероятности вытащить две мармеладные конфеты. Найдите вероятность вытащить два леденца.

Ответ: $\frac{2}{37}$.

Задача 2.4. В мешке Деда Мороза лежат конфеты трёх видов: шоколадные, мармеладные и леденцы. Всего конфет в мешке 36, причём конфет каждого вида больше 2.

Снегурочка наугад вытаскивает из мешка две конфеты. Известно, что вероятность вытащить две шоколадные конфеты в 10 раз больше вероятности вытащить две мармеладные конфеты. Найдите вероятность вытащить два леденца.

Ответ: $\frac{2}{45}$.

Задача 3.1. У некоторого k-угольника (не обязательно выпуклого) ровно 17 углов больше 90°. Найдите наибольшее возможное значение k.

Решение. У k-угольника 17 углов больше 90° и меньше 360°, а остальные $k-17$ углов не превосходят 90°. Поскольку общая сумма углов равна $180^\circ(k-2)$, получаем

$$180 \cdot (k-2) < 360 \cdot 17 + 90 \cdot (k-17).$$

Преобразовывая, находим $k < 55$, т. е. $k \leqslant 54$. Ясно также, что значение $k = 54$ возможно: существует 54-угольник с 17 углами 359° и 37 углами $\frac{3257}{37}^\circ < 90^\circ$. Например, такой, как изображен на рис. 2. $\square$

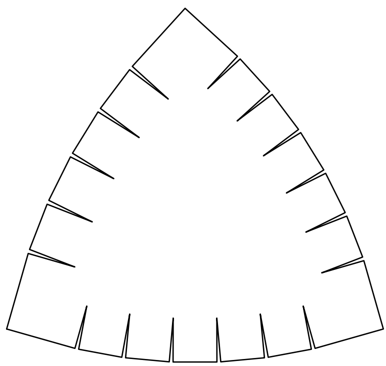


Рис. 2: к решению задачи 3.1

Ответ: 54.

Задача 3.3. У некоторого k-угольника (не обязательно выпуклого) ровно 18 углов больше 90°. Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: 57.

Задача 3.3. У некоторого k-угольника (не обязательно выпуклого) ровно 16 углов больше 90°. Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: 51.

Задача 3.4. У некоторого k-угольника (не обязательно выпуклого) ровно 14 углов больше 90°. Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: 45.

Задача 4.1. Даны действительные числа a, b, c, причём $b > a$. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает неотрицательные значения при всех действительных x. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{11a + b + c}{b - a}.$$

Решение. Из условия следует, что $a > 0$ и $b^2 \leqslant 4ac$, т. е. $c \geqslant \frac{b^2}{4a}$. Обозначим $A = \frac{11a+b+c}{b-a}$. Поскольку $t = b - a > 0$, имеем

$$A \geqslant \frac{11a + b + \frac{b^2}{4a}}{b - a} = \frac{44a^2 + 4ab + b^2}{4a(b - a)} = \frac{49a^2 + 6at + t^2}{4at} = \frac{3}{2} + \frac{49a^2 + t^2}{4at} \geqslant \frac{3}{2} + \frac{14at}{4at} = 5.$$

В конце использовалось неравенство $49a^2 + t^2 \geqslant 14at$, равносильное тому, что $(7a - t)^2 \geqslant 0$.

Осталось заметить, что значение $A = 5$ возможно при $f(x) = ax^2 + 8ax + 16a = a(x + 4)^2$ для $a > 0$. $\square$

Ответ: 5.

Задача 4.2. Даны действительные числа a, b, c, причём $b > a$. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает неотрицательные значения при всех действительных x. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{19a + b + c}{b - a}.$$

Ответ: 6.

Задача 4.3. Даны действительные числа a, b, c, причём $b > a$. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает неотрицательные значения при всех действительных x. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{5a+b+c}{b-a}.$$

Ответ: 4.

Задача 5.1. На доске записаны три простых числа (не обязательно различных). Денис заметил, что их сумма и произведение отличаются в 59 раз. Чему может быть равна сумма трёх чисел на доске? Укажите все возможные варианты.

Решение. Все простые числа не меньше 2, поэтому их произведение не меньше учетверённого наибольшего из них. А их сумма не превосходит утроенного наибольшего из них. Следовательно, произведение больше суммы в 59 раз. Поскольку произведение трёх простых чисел делится на 59, то одно из них равно 59. Обозначим два других простых числа через p и q, будем считать $p \leqslant q$. Тогда $pq \cdot 59 = 59 \cdot (p+q+59)$, откуда $pq = p+q+59$ и $(p-1)(q-1) = 60$. Учитывая, что $1 \leqslant p-1 \leqslant q-1$, получаем несколько вариантов.

- Пусть $p-1=1$, $q-1=60$. Тогда $p=2$, $q=61$. Сумма всех трёх простых чисел равна $2+61+59=122$.
- Пусть $p-1=2$, $q-1=30$. Тогда $p=3$, $q=31$. Сумма всех трёх простых чисел равна $3+31+59=92$.
- Пусть $p-1=3$, $q-1=20$. Тогда $p=4$ — не простое. Этот случай не подходит.
- Пусть $p-1=4$, $q-1=15$. Тогда $q=16$ — не простое. Этот случай не подходит.
- Пусть $p-1=5$, $q-1=12$. Тогда $p=6$ — не простое. Этот случай не подходит.
- Пусть $p-1=6$, $q-1=10$. Тогда $p=7$, $q=11$. Сумма всех трёх простых чисел равна $7+11+59=77$. $\square$

Ответ: 77, 93, 122.

Задача 5.2. На доске записаны три простых числа (не обязательно различных). Денис заметил, что их сумма и произведение отличаются в 71 раз. Чему может быть равна сумма трёх чисел на доске? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 91, 95, 111, 146.

Задача 5.3. На доске записаны три простых числа (не обязательно различных). Денис заметил, что их сумма и произведение отличаются в 107 раз. Чему может быть равна сумма трёх чисел на доске? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 133, 218.

Задача 6.1. В остроугольном треугольнике ABC точка H — основание высоты из точки B. Оказалось, что центр вписанной окружности треугольника BCH совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC. Найдите AC^2, если $AB = 6$.

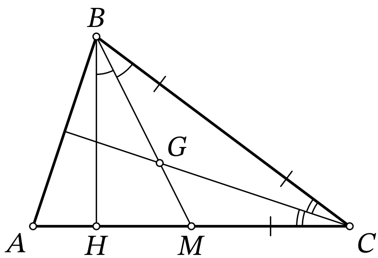


Рис. 3: к решению задачи 6.1

Решение. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC, совпадающая с точкой пересечения биссектрис (центром вписанной окружности) треугольника BCH. В треугольнике ABC эта точка лежит как на биссектрисе угла C, так и на медиане из вершины C. Значит, треугольник ABC — равнобедренный, $AC = BC$.

Продлим прямую BG до пересечения с AC в точке M (рис. 3). С одной стороны, BM — медиана треугольника ABC, т. е. $2CM = AC = BC$. С другой стороны, это биссектриса треугольника BCH, т. е. $HM : CM = BH : BC$, откуда $2HM = BH$. В сумме имеем $2CH = 2CM + 2HM = BC + BH$.

Теперь воспользуемся теоремой Пифагора:

$$CH^2 = BC^2 - BH^2 = (BC + BH) \cdot (BC - BH) = 2CH \cdot (BC - BH),$$

откуда $BC - BH = \frac{1}{2}CH$. Тогда

$$BC = \frac{(BC + BH) + (BC - BH)}{2} = \frac{5}{4}CH \quad \text{и} \quad BH = \frac{(BC + BH) - (BC - BH)}{2} = \frac{3}{4}C$$

Таким образом, стороны прямоугольного треугольника BCH соотносятся как $5:4:3$. Теперь нетрудно завершить решение задачи: так как $AH = AC - CH = BC - \frac{4}{5}BC = \frac{1}{5}BC$ и $BH = \frac{3}{5}BC$, то $AB = \frac{\sqrt{10}}{5}BC$ по теореме Пифагора. Мы знаем $AB = 6$, откуда $BC = 3\sqrt{10}$. Получаем $BC^2 = 90$; это значение совпадает с искомым AC^2. $\square$

Ответ: 90.

Задача 6.2. В остроугольном треугольнике ABC точка H — основание высоты из точки B. Оказалось, что центр вписанной окружности треугольника BCH совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC. Найдите AC^2, если $AB = 8$.

Ответ: 160.

Задача 6.3. В остроугольном треугольнике ABC точка H — основание высоты из точки B. Оказалось, что центр вписанной окружности треугольника BCH совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC. Найдите AC^2, если $AB = 4$.

Ответ: 40.

Задача 6.4. В остроугольном треугольнике ABC точка H — основание высоты из точки B. Оказалось, что центр вписанной окружности треугольника BCH совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC. Найдите AC^2, если $AB = 10$.

Ответ: 250.