Содержание

Первый тур

6-7 классы

Задача 1/1. Грут учит новые слова вот уже на протяжении нескольких месяцев. В одном из месяцев каждое утро Грут учил слова, одинаковое количество слов каждый день. К вечеру первого дня этого месяца он знал 820 слов. К вечеру последнего дня этого месяца он знал 1100 слов. Также у Грута в один из дней этого месяца день рождения, и к вечеру этого дня он знал 1010 слов. Какого числа у Грута день рождения?

Ответ: 20.

Решение. За этот месяц, не считая первого дня, Грут выучил $1100 - 820 = 280$ слов. В месяце может быть от 28 до 31 дней, то есть эти 280 слов Грут выучил за 27, 28, 29 или 30 дней. Единственным числом из этого списка, на которое делится 280, является 28, следовательно, Грут учил по 10 слов в день.

Осталось вычислить, на какой день Грут выучил 1010 слов. $(1010-820) : 10 = 19$ дней прошло с вечера 1-го числа, то есть день рождения у Грута 20-го числа. $\square$

Задача 1/2. Грут учит новые слова вот уже на протяжении нескольких месяцев. В одном из месяцев каждое утро Грут учил слова, одинаковое количество слов каждый день. К вечеру первого дня этого месяца он знал 820 слов. К вечеру последнего дня этого месяца он знал 1100 слов. Также у Грута в один из дней этого месяца день рождения, и к вечеру этого дня он знал 1020 слов. Какого числа у Грута день рождения?

Ответ: 21.

Задача 1/3. Грут учит новые слова вот уже на протяжении нескольких месяцев. В одном из месяцев каждое утро Грут учил слова, одинаковое количество слов каждый день. К вечеру первого дня этого месяца он знал 820 слов. К вечеру последнего дня этого месяца он знал 1100 слов. Также у Грута в один из дней этого месяца день рождения, и к вечеру этого дня он знал 1030 слов. Какого числа у Грута день рождения?

Ответ: 22.

Задача 1/4. Грут учит новые слова вот уже на протяжении нескольких месяцев. В одном из месяцев каждое утро Грут учил слова, одинаковое количество слов каждый день. К вечеру первого дня этого месяца он знал 820 слов. К вечеру последнего дня этого месяца он знал 1100 слов. Также у Грута в один из дней этого месяца день рождения, и к вечеру этого дня он знал 1040 слов. Какого числа у Грута день рождения?

Ответ: 23.

Задача 2/1. Вокруг парка бегают три спортсмена: Андрей, Боря и Вася (каждый – со своей постоянной скоростью). Андрей и Боря бегают в одном направлении, а Вася — в противоположном. Андрей и Вася встречаются раз в 14 минут, Боря и Вася встречаются раз в 21 минуту. Раз в сколько минут встречаются Андрей и Боря?

Ответ: 42.

Решение. Пусть S км — длина круга вокруг парка, а также x, y, z км/мин — скорости Андрея, Бори и Васи соответственно.

Из первого условия следует, что Андрей и Боря за 14 минут суммарно пробегают полный круг. Следовательно,

$$x + z = \frac{S}{14}\,.$$

Аналогично, из второго условия

$$y + z = \frac{S}{21}\,.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$x - y = (x + z) - (y + z) = \frac{S}{14} - \frac{S}{21} = \frac{S}{42}\,.$$

Следовательно, за 1 минуту Андрей пробегает больше Бори на $\frac{S}{42}$ км, то есть встречается с Борей (каждый раз обгоняя его на один полный круг) раз в 42 минуты. □

Задача 2/2. Вокруг парка бегают три спортсмена: Андрей, Боря и Вася (каждый – со своей постоянной скоростью). Андрей и Боря бегают в одном направлении, а Вася — в противоположном. Андрей и Вася встречаются раз в 12 минут, Боря и Вася встречаются раз в 18 минуту. Раз в сколько минут встречаются Андрей и Боря?

Ответ: 36.

Задача 2/3. Вокруг парка бегают три спортсмена: Андрей, Боря и Вася (каждый – со своей постоянной скоростью). Андрей и Боря бегают в одном направлении, а Вася — в противоположном. Андрей и Вася встречаются раз в 16 минут, Боря и Вася встречаются раз в 24 минуту. Раз в сколько минут встречаются Андрей и Боря?

Ответ: 48.

Задача 2/4. Вокруг парка бегают три спортсмена: Андрей, Боря и Вася (каждый – со своей постоянной скоростью). Андрей и Боря бегают в одном направлении, а Вася — в противоположном. Андрей и Вася встречаются раз в 18 минут, Боря и Вася встречаются раз в 27 минуту. Раз в сколько минут встречаются Андрей и Боря?

Ответ: 54.

Задача 3/1. Найдите наименьшее натуральное число, которое обладает следующими тремя свойствами:

- делится на 632;
- заканчивается на 632;
- больше 632.

Ответ: 79632.

Решение. Раз число заканчивается на 632 и больше 632, то оно представимо в виде $1000n + 632$, где n — некоторое натуральное число.

Из того, что $1000n + 632$ делится на 632, следует, что $1000n$ делится на 632. То есть выражение

$$\frac{1000n}{632} = \frac{125n}{79}$$

является некоторым целым числом. Получаем, что n делится на 79, то есть $n \geqslant 79$. Очевидно, что при $n = 79$, что соответствует числу 79632, условие задачи выполняется. □

Задача 3/2. Найдите наименьшее натуральное число, которое обладает следующими тремя свойствами:

- делится на 568;
- заканчивается на 568;
- больше 568.

Ответ: 71568.

Задача 3/3. Найдите наименьшее натуральное число, которое обладает следующими тремя свойствами:

- делится на 584;
- заканчивается на 584;
- больше 584.

Ответ: 73584.

Задача 3/4. Найдите наименьшее натуральное число, которое обладает следующими тремя свойствами:

- делится на 664;
- заканчивается на 664;
- больше 664.

Ответ: 83664.

Задача 4/1. На доске написана последовательность из одиннадцати чисел

$$2021 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10\,.$$

Петя расставляет между ними 10 арифметических знаков: плюсы и минусы (необязательно использовать оба знака). Затем вычисляет значение получившего выражения. Сколько различных значений он может получить?

Ответ: 56.

Решение. Заметим, что как бы мы ни расставляли знаки, итоговое значение выражения будет чётным, так как среди наших одиннадцати чисел ровно шесть нечётных.

Покажем, как можно получить любое чётное число от

$$2021 - 1 - 2 - \ldots - 10 = 2021 - 55 = 1966$$

до

$$2021 + 1 + 2 + \ldots + 10 = 2021 + 55 = 2076\,.$$

Для этого нам достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма. Если некоторое чётное число $n < 2076$ представляется в виде

$$2021 \pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm 10\,,$$

то в таком же виде можно представить число $n + 2$.

Доказательство леммы. Если в выражении, равном n, перед единицей стоит знак минус, то достаточно заменить его на плюс, и значение выражения увеличится ровно на 2, что нам и требуется.

Если же перед единицей стоит знак плюс, то найдутся два подряд идущих числа k и $k+1$ таких, что перед k стоит плюс, а перед $k+1$ — минус (иначе перед всеми числами стоит знак плюс, что противоречит условию $n < 2076$). Поменяем эти два знака. Тогда общая сумма увеличится на 2, что нам и требуется. □

Задача 4/2. На доске написана последовательность из десяти чисел

$$2021 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9\,.$$

Петя расставляет между ними 9 арифметических знаков: плюсы и минусы (необязательно использовать оба знака). Затем вычисляет значение получившего выражения. Сколько различных значений он может получить?

Ответ: 46.

Задача 4/3. На доске написана последовательность из двенадцати чисел

$$2021 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11\,.$$

Петя расставляет между ними 11 арифметических знаков: плюсы и минусы (необязательно использовать оба знака). Затем вычисляет значение получившего выражения. Сколько различных значений он может получить?

Ответ: 67.

Задача 4/4. На доске написана последовательность из тринадцати чисел

$$2021 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12\,.$$

Петя расставляет между ними 12 арифметических знаков: плюсы и минусы (необязательно использовать оба знака). Затем вычисляет значение получившего выражения. Сколько различных значений он может получить?

Ответ: 79.

Задача 5/1. В каждой клетке первого столбца клетчатой доски 9×9 стоит белая пешка, а в каждой клетке последнего столбца — чёрная пешка. Каждую минуту разрешается сдвинуть одну произвольную пешку на соседнюю по стороне клетку, если та свободна. Через какое наименьшее количество минут можно добиться того, чтобы все чёрные пешки стояли в первом столбце, а все белые — в последнем?

Ответ: 154.

Решение. Очевидно, что каждая пешка должна сделать хотя бы 8 горизонтальных ходов, иначе она не достигнет противоположного столбца.

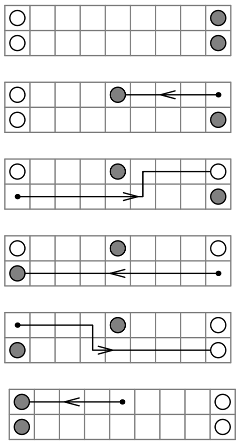
Теперь рассмотрим пару пешек, стоящих в одной строке. Хотя бы одна из них должна сделать вертикальный ход, иначе они не смогут разминуться. Следовательно, вертикальных ходов должно быть хотя бы 9.

Докажем, что ровно 9 таких ходов быть не может. Раскрасим строки нашей таблицы в шахматном порядке (первая строка — белая, вторая — чёрная, третья — белая, ..., девятая — белая). Первоначально в белых строках стоят 10 пешек. После каждого вертикального хода это число меняется на 1, то есть меняет свою чётность (а после горизонтального хода это число не меняется). При этом в конце процесса мы снова получим 10, то есть мы должны сделать чётное число ходов, не меньшее 9. Следовательно, всего будет хотя бы 10 вертикальных ходов.

Кроме того, каждая из 18 пешек сделает хотя бы по 8 горизонтальных ходов, то есть всего ходов будет не менее $10 + 18 \cdot 8 = 154$.

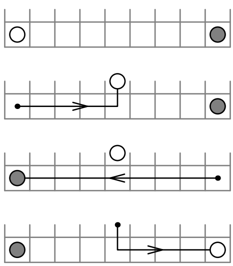
Приведём пример на 154 хода.

Рассмотрим прямоугольник, образованный первыми двумя строками. На рисунке ниже приведена последовательность ходов, которая меняет в нём белые пешки с чёрными; при этом используются только 2 вертикальных хода.



Аналогично поступим с тремя прямоугольниками 2×9, образованными следующими парами строк.

Остались только две пешки в последней строке. На рисунке ниже указано, как их поменять, использовав 2 вертикальных хода.



Всего было сделано 10 вертикальных ходов. Кроме того, каждая из 18 пешек сделала 8 горизонтальных ходов. Итого получилось $10 + 18 \cdot 8 = 154$ хода. $\square$

Задача 5/2. В каждой клетке первого столбца клетчатой доски 7×7 стоит белая пешка, а в каждой клетке последнего столбца — чёрная пешка. Каждую минуту разрешается сдвинуть одну произвольную пешку на соседнюю по стороне клетку, если та свободна. Через какое наименьшее количество минут можно добиться того, чтобы все чёрные пешки стояли в первом столбце, а все белые — в последнем?

Ответ: 92.

Задача 5/3. В каждой клетке первого столбца клетчатой доски 11×11 стоит белая пешка, а в каждой клетке последнего столбца — чёрная пешка. Каждую минуту разрешается сдвинуть одну произвольную пешку на соседнюю по стороне клетку, если та свободна. Через какое наименьшее количество минут можно добиться того, чтобы все чёрные пешки стояли в первом столбце, а все белые — в последнем?

Ответ: 232.

Задача 6/1. Вдоль лесной дороги длиной 64 метра растут 65 ёлок, расстояние между любыми двумя соседними ёлками составляет 1 метр. Два злых дровосека играют в следующую игру. Первый дровосек срубает 32 ёлки, затем второй срубает 16 ёлок, затем первый срубает 8 ёлок, ..., в конце второй срубает 1 ёлку. В итоге остаются два дерева. Первый хочет сделать так, чтобы расстояние между ними было как можно больше, а второй хочет ему помешать. Чему будет равно расстояние между двумя последними ёлками при оптимальной игре обоих дровосеков?

Ответ: 8.

Решение. Докажем, что первый дровосек может сделать так, что расстояние между двумя последними ёлками будет не менее 8 метров, а второй дровосек может сделать так, чтобы оно было не более 8 метров. Тогда получим, что 8 метров — это и есть ответ задачи.

Стратегия первого дровосека. Каждым ходом дровосек будет срубать ёлки через одну, начиная со второй. Например, первым ходом он срубает все ёлки с чётными номерами. В результате минимальное расстояние между ёлками будет хотя бы удваиваться: после первого его хода оно составит не менее 2 метров, после второго — не менее 4 метров, а после третьего — не менее 8 метров (ясно, что ходы второго дровосека не могут уменьшить минимальное расстояние между ёлками).

Стратегия второго дровосека. Каждым ходом дровосек будет отмечать среднюю по порядку ёлку (до последнего хода ёлок будет оставаться нечётное количество) и вырубать либо все ёлки слева от средней, либо все справа от неё в зависимости от того, с какой стороны расстояние от средней ёлки до крайней окажется больше. Так он каждым своим ходом может уменьшать максимальное расстояние между ёлками хотя бы в два раза. За три хода он уменьшит его до не более чем 8 метров. □

Задача 6/2. Вдоль лесной дороги длиной 256 метра растут 257 ёлок, расстояние между любыми двумя соседними ёлками составляет 1 метр. Два злых дровосека играют в следующую игру. Первый дровосек срубает 128 ёлки, затем второй срубает 64 ёлок, затем первый срубает 32 ёлок, ..., в конце второй срубает 1 ёлку. В итоге остаются два дерева. Первый хочет сделать так, чтобы расстояние между ними было как можно больше, а второй хочет ему помешать. Чему будет равно расстояние между двумя последними ёлками при оптимальной игре обоих дровосеков?

Ответ: 16.

8-9 классы

Задача 1/1. В ряд стоят 10 корзин с яблоками, пустых корзин нет. В любых двух соседних корзинах количество яблок отличается ровно на 1. Известно, что есть корзина, в которой лежат 2 яблока. Сколько различных значений может принимать общее количество яблок?

Ответ: 26.

Решение. Будем доказывать, что всего яблок может быть любое нечётное число от 15 до 65, всего 26 значений.

Если количества яблок в соседних корзинах отличаются ровно на 1, то они разной чётности. Чётные и нечётные количества чередуются, то есть всего 5 корзин с нечётным количеством и 5 с чётным, значит, всего яблок нечётное количество.

Очевидно, что минимальное значение получится, когда в корзинах будет чередование 1 и 2 яблок, в сумме 15. А максимальное — когда 2 находится в крайней корзине, а в каждой следующей на 1 яблоко больше, в сумме $2+3+\ldots+11 = 65$ яблок. (Действительно, если ни в одной из крайних корзин не 2 яблока, то ту из них, в которой яблок меньше, можно вытащить и поставить с другой стороны, добавив при этом в неё яблоки.)

Мы показали, что все возможные суммы обязательно нечётны, а также находятся в промежутке от 15 до 65. Осталось показать, что каждое из таких значений действительно возможно.

Покажем, как из примера на n яблок получать пример на $n + 2$. Для начала возьмём пример с минимальным количеством яблок $2, 1, 2, \ldots, 2, 1$. Будем всегда сохранять 2 яблока в первой корзине. Пусть у нас получилось привести пример с n яблоками. Если среди корзин со 2-й по 10-ю найдётся такая, что в ней яблок меньше, чем в двух соседних (для 10-й — яблок меньше, чем в 9-й), то в такой корзине можно увеличить количество на 2, при этом необходимые условия (есть корзина с двумя яблоками, количество яблок в любых соседних корзинах отличается на 1) будут выполняться и получится пример на $n + 2$ яблока. Если же такой корзины нет, то в каждой следующей корзине яблок больше, чем в предыдущей, а это значит, что мы достигли максимума в 65 яблок.

Таким образом, начиная с 15 яблок, мы можем увеличивать общее количество на 2, пока не получим 65, а это и означает, что любое нечётное значение от 15 до 65 возможно. $\square$

Задача 1/2. В ряд стоят 12 корзин с яблоками, пустых корзин нет. В любых двух соседних корзинах количество яблок отличается ровно на 1. Известно, что есть корзина, в которой лежат 2 яблока. Сколько различных значений может принимать общее количество яблок?

Ответ: 37.

Задача 1/3. В ряд стоят 14 корзин с яблоками, пустых корзин нет. В любых двух соседних корзинах количество яблок отличается ровно на 1. Известно, что есть корзина, в которой лежат 2 яблока. Сколько различных значений может принимать общее количество яблок?

Ответ: 50.

Задача 1/4. В ряд стоят 8 корзин с яблоками, пустых корзин нет. В любых двух соседних корзинах количество яблок отличается ровно на 1. Известно, что есть корзина, в которой лежат 2 яблока. Сколько различных значений может принимать общее количество яблок?

Ответ: 17.

Задача 2/1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в ряд встали 400 жителей острова, среди которых есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Каждый стоящий в ряду сказал: «Количество лжецов с одной стороны от меня делится на количество лжецов с другой стороны от меня» (никакое число не делится на ноль). Сколько всего в ряду рыцарей?

Ответ: 399.

Решение. Рассмотрим самого правого лжеца. С одной стороны от него 0 лжецов, а значит, и со второй должно быть 0, иначе он скажет правду (0 делится на любое натуральное число). Следовательно, в ряду всего 1 лжец.

Легко проверить, что в случае, когда в ряду ровно один лжец и, соответственно, 399 рыцарей, условие задачи выполнено. □

Задача 2/2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в ряд встали 500 жителей острова, среди которых есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Каждый стоящий в ряду сказал: «Количество лжецов с одной стороны от меня делится на количество лжецов с другой стороны от меня» (никакое число не делится на ноль). Сколько всего в ряду рыцарей?

Ответ: 499.

Задача 2/3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в ряд встали 600 жителей острова, среди которых есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Каждый стоящий в ряду сказал: «Количество лжецов с одной стороны от меня делится на количество лжецов с другой стороны от меня» (никакое число не делится на ноль). Сколько всего в ряду рыцарей?

Ответ: 599.

Задача 2/4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в ряд встали 700 жителей острова, среди которых есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Каждый стоящий в ряду сказал: «Количество лжецов с одной стороны от меня делится на количество лжецов с другой стороны от меня» (никакое число не делится на ноль). Сколько всего в ряду рыцарей?

Ответ: 699.

Задача 3/1. Дано натуральное число n. Через $S(n)$ обозначим сумму всех чисел, получаемых из числа n отбрасыванием нескольких последних цифр (например, $S(2021) = 202 + 20 + 2 = 224$). Найдите число n, если известно, что его сумма цифр равна 25, а $S(n) = 6323$.

Ответ: 56932.

Решение. Через $T(n)$ обозначим сумму цифр числа n. Докажем, что $n = T(n) + 9S(n)$.

Рассмотрим разложение

$$n = 10^{k-1}a_{k-1} + 10^{k-2}a_{k-2} + \ldots + 10a_1 + a_0\,,$$

где a_{k-1}, a_{k-2}, $\ldots$, a_1, a_0 — цифры числа n.

Каждое из слагаемых, входящих в $S(n)$, разложим аналогично по цифрам, и посмотрим, с каким коэффициентом в итоговую сумму будет входить цифра a_{k-1}. В первое слагаемое (которое получилось из n отбрасыванием последней цифры) она входит с коэффициентом 10^{k-2}, во второе — с 10^{k-3} и т. д. Получается, что всего в $S(n)$ она входит с коэффициентом $10^{k-2} + 10^{k-1} + \ldots + 1 = 1\ldots1$ (число из $k-1$ единицы).

А в сумму $T(n) = a_{k-1} + a_{k-2} + \ldots + a_1 + a_0$ цифра a_{k-1} входит с коэффициентом 1.

Складывая, получаем, что в $T(n) + 9S(n)$ цифра a_{k-1} войдёт с коэффициентом $1 + 9\ldots9 = 10^{k-1}$, то есть с тем же, что и в число n. Нетрудно повторить эти рассуждения и для остальных цифр.

Значит, $n = T(n) + 9S(n) = 25 + 8 \cdot 6323 = 56932$. $\square$

Задача 3/2. Дано натуральное число n. Через $S(n)$ обозначим сумму всех чисел, получаемых из числа n отбрасыванием нескольких последних цифр (например, $S(2021) = 202 + 20 + 2 = 224$). Найдите число n, если известно, что его сумма цифр равна 26, а $S(n) = 6323$.

Ответ: 56933.

Задача 3/3. Дано натуральное число n. Через $S(n)$ обозначим сумму всех чисел, получаемых из числа n отбрасыванием нескольких последних цифр (например, $S(2021) = 202 + 20 + 2 = 224$). Найдите число n, если известно, что его сумма цифр равна 27, а $S(n) = 6323$.

Ответ: 56934.

Задача 3/4. Дано натуральное число n. Через $S(n)$ обозначим сумму всех чисел, получаемых из числа n отбрасыванием нескольких последних цифр (например, $S(2021) = 202 + 20 + 2 = 224$). Найдите число n, если известно, что его сумма цифр равна 28, а $S(n) = 6323$.

Ответ: 56935.

Задача 4/1. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке L. Оказалось, что $\angle BLC = 90°$. Найдите длину отрезка CL, если $BL = 10$ и $DL = 13$.

Ответ: 24.

Решение. Сперва заметим, что $\angle LBA = \angle CBL = \angle ALB$ (второе равенство следует из параллельности AD и BC), поэтому $AB = AL$ (рис. 1).

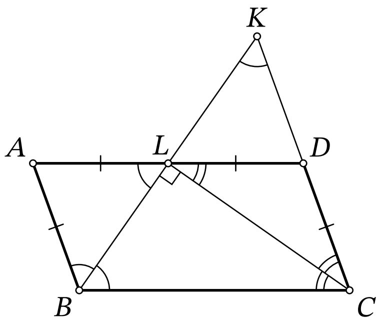


Рис. 1: к решению задачи 4/1

Обозначим точку пересечения прямых BL и CD за K. Получаем, что $\angle CBK = \angle KBA = \angle BKC$ (второе равенство следует из параллельности AB и CD), то есть треугольник BCK является равнобедренным ($BC = CK$). Видим, что

CL — высота в равнобедренном треугольнике, поэтому также является и его биссектрисой.

Аналогично ранее доказанному имеем $\angle DCL = \angle LCB = \angle CLD$, откуда $DC = DL$. Следовательно, L является серединой стороны AD, откуда находим $BC = 2LD = 26$. Осталось применить теорему Пифагора для треугольника BLC и получить $CL = \sqrt{BC^2 - BL^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$. □

Задача 4/2. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке L. Оказалось, что $\angle BLC = 90°$. Найдите длину отрезка CL, если $BL = 12$ и $DL = 10$.

Ответ: 16.

Задача 4/3. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке L. Оказалось, что $\angle BLC = 90°$. Найдите длину отрезка CL, если $BL = 20$ и $DL = 26$.

Ответ: 48.

Задача 4/4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке L. Оказалось, что $\angle BLC = 90°$. Найдите длину отрезка CL, если $BL = 24$ и $DL = 20$.

Ответ: 32.

Задача 5/1. В течение года 20 знатоков участвовали в передаче «Своя игра». В одной игре участвует ровно 3 из них. Назовём пару знатоков *уникальной,* если в этом году они играли друг с другом ровно один раз. В конце года оказалось, что в каждой тройке игроков есть хотя бы одна уникальная пара. Какое наибольшее количество игр могло быть сыграно в этом году?

Ответ: 171.

Решение. Сначала приведём пример со 171 игрой. Выберем одного знатока Z, который будет участвовать во всех играх, и будем добавлять к Z всевозможные пары двух других знатоков, каждую по разу. Всего получится $\frac{19 \cdot 18}{2} = 171$ пара. Заметим, что для любой тройки знатоков пара знатоков, отличных от Z, и будет уникальной. Теперь покажем, что большего числа игр быть не может.

Каждую пару игроков можно дополнить до тройки 18 способами (добавив одного знатока из оставшихся). Всего пар игроков $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$. Предположим, что было проведено хотя бы 172 игры. Тогда уникальных пар тоже не меньше 172 (каждой игравшей тройке соответствует хотя бы одна уникальная пара, и разным тройкам не может соответствовать одна и та же пара). Тогда неуникальных пар не больше $190 - 172 = 18$, и каждая из них участвовала не более чем в 18 играх (так как игравшие тройки не могли повторяться).

Посчитаем количество *встреч* пар игроков. Каждая уникальная пара встречалась один раз, а неуникальная — не более 18 раз. Следовательно, всего было не более $172 + 18 \cdot 18 = 496$ встреч. С другой стороны, в каждой игре играло ровно 3 пары, значит, встреч было хотя бы $172 \cdot 3 = 516$, противоречие. $\square$

Задача 5/2. В течение года 22 знатоков участвовали в передаче «Своя игра». В одной игре участвует ровно 3 из них. Назовём пару знатоков *уникальной,* если в этом году они играли друг с другом ровно один раз. В конце года оказалось, что в каждой тройке игроков есть хотя бы одна уникальная пара. Какое наибольшее количество игр могло быть сыграно в этом году?

Ответ: 210.

Задача 5/3. В течение года 23 знатоков участвовали в передаче «Своя игра». В одной игре участвует ровно 3 из них. Назовём пару знатоков *уникальной,* если в этом году они играли друг с другом ровно один раз. В конце года оказалось, что в каждой тройке игроков есть хотя бы одна уникальная пара. Какое наибольшее количество игр могло быть сыграно в этом году?

Ответ: 231.

Задача 5/4. В течение года 24 знатоков участвовали в передаче «Своя игра». В одной игре участвует ровно 3 из них. Назовём пару знатоков *уникальной,* если в этом году они играли друг с другом ровно один раз. В конце года оказалось, что в каждой тройке игроков есть хотя бы одна уникальная пара. Какое наибольшее количество игр могло быть сыграно в этом году?

Ответ: 253.

Задача 6/1. Аня выписала на доску все натуральные числа от 1 до 5000, а затем Боря стёр какие-то k из них. При каком наибольшем k можно гарантировать, что среди оставшихся на доске чисел обязательно найдётся 31 число, одно из которых равно сумме тридцати остальных?

Ответ: 151.

Решение. Если вычеркнуть первые 152 числа, то сумма любых тридцати оставшихся чисел будет не меньше $153 + 154 + \ldots + 182 = 5025 > 5000$ и не может равняться числу на доске.

Пусть вычеркнуто не более 151 числа. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — оставшиеся числа на доске, не превосходящие 181 ($k \geqslant 30$), тогда из этого промежутка вычеркнуто $181 - k$ чисел. Обозначим $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{29}$ и рассмотрим $k - 29$ сумм $S + a_{30}$, $S + a_{31}$, $\ldots$, $S + a_k$. Они все различны, больше 181 и не превосходят 5000 (поскольку $181 < 1 + \ldots + 30 \leqslant S + a_i \leqslant 152 + \ldots + 181 < 5000$), следовательно, все они должны быть вычеркнуты. Получается, что вычеркнуто хотя бы $(181 - k) + (k - 29) = 152$ числа, противоречие. $\square$

Задача 6/2. Аня выписала на доску все натуральные числа от 1 до 4000, а затем Боря стёр какие-то k из них. При каком наибольшем k можно гарантировать, что среди оставшихся на доске чисел обязательно найдётся 31 число, одно из которых равно сумме тридцати остальных?

Ответ: 117.

Задача 6/3. Аня выписала на доску все натуральные числа от 1 до 7000, а затем Боря стёр какие-то k из них. При каком наибольшем k можно гарантировать, что среди оставшихся на доске чисел обязательно найдётся 31 число, одно из которых равно сумме тридцати остальных?

Ответ: 217.

Задача 6/4. Аня выписала на доску все натуральные числа от 1 до 8000, а затем Боря стёр какие-то k из них. При каком наибольшем k можно гарантировать, что среди оставшихся на доске чисел обязательно найдётся 31 число, одно из которых равно сумме тридцати остальных?

Ответ: 251.

10-11 классы

Задача 1/1. Два землекопа вместе копали яму. Если бы первый землекоп копал со скоростью второго, то они бы справились на 4 минуты позже. А если бы второй копал со скоростью первого, то они бы справились на 1 минуту раньше. За какое время они вместе выкопают яму, если каждый будет копать в своём темпе? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 160.

Решение. Обозначим скорость выкапывания ямы первым землекопом за x_1 ямы в минуту, а скорость второго — за x_2. По условию получаем следующие равенства:

$$\frac{1}{x_1+x_2}-\frac{1}{2x_2}=-4\,;\qquad \frac{1}{x_1+x_2}-\frac{1}{2x_1}=1\,.$$

Домножим первое на x_2, а второе на x_1 и сложим два полученных равенства:

$$\frac{x_2+x_1}{x_1+x_2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-4x_2+x_1 \quad\Leftrightarrow\quad 0=-4x_2+x_1\,,$$

откуда $x_1=4x_2$.

Нам надо найти $\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{1}{5x_2}$. Подставив в первое равенство $x_1=4x_2$, получим

$$\frac{1}{5x_2}-\frac{1}{2x_2}=-4,$$

то есть $\frac{-3}{10x_2}=-4$, откуда легко извлечь $\frac{1}{5x_2}=\frac{8}{3}$. Следовательно, искомое время составляет $\frac{8}{3}$ минут, то есть $\frac{8}{3}\cdot 60=160$ секунд. □

Задача 1/2. Два землекопа вместе копали яму. Если бы первый землекоп копал со скоростью второго, то они бы справились на 5 минуты позже. А если бы второй копал со скоростью первого, то они бы справились на 1 минуту раньше. За какое время они вместе выкопают яму, если каждый будет копать в своём темпе? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 150.

Задача 1/3. Два землекопа вместе копали яму. Если бы первый землекоп копал со скоростью второго, то они бы справились на 6 минуты позже. А если бы второй копал со скоростью первого, то они бы справились на 1 минуту раньше. За какое время они вместе выкопают яму, если каждый будет копать в своём темпе? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 150.

Задача 1/4. Два землекопа вместе копали яму. Если бы первый землекоп копал со скоростью второго, то они бы справились на 7 минуты позже. А если бы второй копал со скоростью первого, то они бы справились на 1 минуту раньше. За какое время они вместе выкопают яму, если каждый будет копать в своём темпе? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 140.

Задача 2/1. В классе учатся 20 школьников. В первый учебный день после каникул 7 человек сделали уборку в классном кабинете. Далее каждый учебный день какие-то двое школьников снова прибирали класс.

Спустя N учебных дней после каникул учитель заметил, что любые два школьника убирались вместе не более одного раза. Какое наибольшее значение может принимать N?

Ответ: 170.

Решение. Всего пар учеников $\frac{20\cdot 19}{2} = 190$, а после первого дня осталось $190 - \frac{7\cdot 6}{2} = 169$ пар, которые пока не убирались. Следовательно, не учитывая первого дня, максимум могло пройти 169 дней. С учётом первого дня получаем 170 дней. Легко понять, что это значение возможно, если в каждый последующий день будет убираться любая пара школьников, не убиравшихся вместе ранее. $\square$

Задача 2/2. В классе учатся 20 школьников. В первый учебный день после каникул 6 человек сделали уборку в классном кабинете. Далее каждый учебный день какие-то двое школьников снова прибирали класс.

Спустя N учебных дней после каникул учитель заметил, что любые два школьника убирались вместе не более одного раза. Какое наибольшее значение может принимать N?

Ответ: 176.

Задача 2/3. В классе учатся 20 школьников. В первый учебный день после каникул 8 человек сделали уборку в классном кабинете. Далее каждый учебный день какие-то двое школьников снова прибирали класс.

Спустя N учебных дней после каникул учитель заметил, что любые два школьника убирались вместе не более одного раза. Какое наибольшее значение может принимать N?

Ответ: 163.

Задача 2/4. В классе учатся 20 школьников. В первый учебный день после каникул 9 человек сделали уборку в классном кабинете. Далее каждый учебный день какие-то двое школьников снова прибирали класс.

Спустя N учебных дней после каникул учитель заметил, что любые два школьника убирались вместе не более одного раза. Какое наибольшее значение может принимать N?

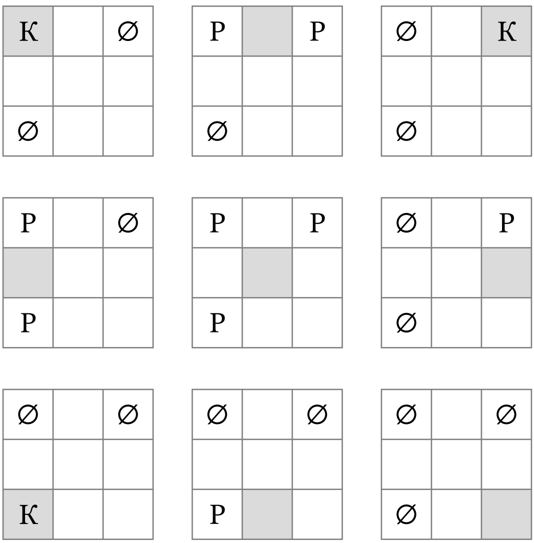
Ответ: 155.

Задача 3/1. В квадрате 30×30 Рома закрасил одну клетку невидимыми чернилами. У Насти есть проявитель, который действует следующим образом: если его применить к закрашенной клетке, то она станет красной, если применить к клетке, соседней с закрашенной по стороне или углу, то она станет розовой, а во всех других случаях ничего не произойдёт. Какое наименьшее количество раз Насте придётся применить проявитель, чтобы гарантированно найти клетку, закрашенную Ромой? (Проявлять саму эту клетку Насте не надо — достаточно наверняка узнать, где она находится.)

Ответ: 102.

Решение. Сначала покажем, как Насте гарантированно найти клетку за 102 использования проявителя. Разобьём всю доску на 100 квадратов 3×3 и применим проявитель к 99 центральным клеткам этих квадратов. После этих действий мы однозначно находим квадрат 3×3, в котором будет закрашенная клетка. Действительно, если в каком-то из квадратов 3×3 клетка покрасилась в розовый или красный, то закрашенная Ромой клетка находится в этом квадрате, а если же за 99 действий ничего не произошло, то Ромина клетка в оставшемся квадрате.

Теперь покажем, как за 3 применения проявителя найти клетку в квадрате 3×3. Применим проявитель к трём угловым клеткам и рассмотрим, как покрасятся клетки в зависимости от того, какую клетку закрасил Рома. На рисунках ниже закрашенная клетка отмечена серым, а результаты проявителей — символами К (красный), Р (розовый) и $\varnothing$ (ничего) соответственно.



Заметим, что для разных клеток получаются разные варианты раскрасок. Следовательно, Настя сможет за 102 применения проявителя определить клетку, закрашенную Ромой.

Теперь докажем, что 101 применения проявителя может не хватить. Пусть после первых 99 применений ничего не произошло. Такое возможно, поскольку всего клеток 900, а за 99 применений получится максимум $99 \cdot 9 = 891$ клетка, которые совпадают или соседствуют с выбранными, и остаётся хотя бы 9 клеток, которые мог закрасить Рома.

При следующем применении проявителя либо в случае, когда клетка не покрасится, либо в случае, когда она покрасится в розовый, останется хотя бы $\frac{9-1}{2} = 4$ варианта для Роминой клетки. Аналогично, после последнего применения либо в случае, когда клетка не покрасится, либо в случае, когда она покрасится в розовый, останется хотя бы 2 варианта для Роминой клетки. Значит, при таком исходе Настя не сможет наверняка её определить. $\square$

Задача 3/2. В квадрате 33×33 Рома закрасил одну клетку невидимыми чернилами. У Насти есть проявитель, который действует следующим образом: если его применить к закрашенной клетке, то она станет красной, если применить к клетке, соседней с закрашенной по стороне или углу, то она станет розовой, а во всех других случаях ничего не произойдёт. Какое наименьшее количество раз Насте придётся применить проявитель, чтобы гарантированно найти клетку, закрашенную Ромой? (Проявлять саму эту клетку Насте не надо — достаточно наверняка узнать, где она находится.)

Ответ: 123.

Задача 3/3. В квадрате 36×36 Рома закрасил одну клетку невидимыми чернилами. У Насти есть проявитель, который действует следующим образом: если его применить к закрашенной клетке, то она станет красной, если применить к клетке, соседней с закрашенной по стороне или углу, то она станет розовой, а во всех других случаях ничего не произойдёт. Какое наименьшее количество раз Насте придётся применить проявитель, чтобы гарантированно найти клетку, закрашенную Ромой? (Проявлять саму эту клетку Насте не надо — достаточно наверняка узнать, где она находится.)

Ответ: 146.

Задача 3/4. В квадрате 39×39 Рома закрасил одну клетку невидимыми чернилами. У Насти есть проявитель, который действует следующим образом: если его применить к закрашенной клетке, то она станет красной, если применить к клетке, соседней с закрашенной по стороне или углу, то она станет розовой, а во всех других случаях ничего не произойдёт. Какое наименьшее количество раз Насте придётся применить проявитель, чтобы гарантированно найти клетку, закрашенную Ромой? (Проявлять саму эту клетку Насте не надо — достаточно наверняка узнать, где она находится.)

Ответ: 171.

Задача 4/1. Найдите количество пар неотрицательных чисел (x, y), каждое из которых не превосходит 4π, удовлетворяющих равенству $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y)^2 = (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{ctg} y - 1)$.

Ответ: 16.

Решение. Обозначим $\operatorname{tg} x + 1 = a, \operatorname{ctg} y - 1 = b$. Тогда равенство перепишется в виде $(a+b)^2 = ab$, что эквивалентно $a^2 + ab + b^2 = 0$ или $a^2 + (a+b)^2 + b^2 = 0$. Сумма неотрицательных чисел может быть равна 0, только если все слагаемые равны 0. Следовательно, $a = b = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{ctg} y = 1$. Число x может принимать любое из значений $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$, а число y может принимать любое из значений $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$. Значит, всего пар $4 \cdot 4 = 16$. □

Задача 4/2. Найдите количество пар неотрицательных чисел (x, y), каждое из которых не превосходит 5π, удовлетворяющих равенству $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y)^2 = (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{ctg} y - 1)$.

Ответ: 25.

Задача 4/3. Найдите количество пар неотрицательных чисел (x, y), каждое из которых не превосходит 6π, удовлетворяющих равенству $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y)^2 = (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{ctg} y - 1)$.

Ответ: 36.

Задача 4/4. Найдите количество пар неотрицательных чисел (x, y), каждое из которых не превосходит 7π, удовлетворяющих равенству $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y)^2 = (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{ctg} y - 1)$.

Ответ: 49.

Задача 5/1. Аня выписала на доску все натуральные числа от 1 до 5000, а затем Боря стёр какие-то k из них. При каком наибольшем k можно гарантировать, что среди оставшихся на доске чисел обязательно найдётся 31 число, одно из которых равно сумме тридцати остальных?

Ответ: 151.

Решение. Если вычеркнуть первые 152 числа, то сумма любых тридцати оставшихся чисел не меньше $153 + 154 + \ldots + 182 = 5025 > 5000$ и не может равняться числу на доске.

Пусть вычеркнуто не более 151 числа. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — оставшиеся числа на доске, не превосходящие 181 ($k \geqslant 30$), тогда из этого промежутка вычеркнуто $181-k$ чисел. Обозначим $S=a_1+a_2+\ldots+a_{29}$ и рассмотрим $k-29$ сумм $S+a_{30}, S+a_{31}, \ldots, S+a_k$. Они все различны, больше 181 и не превосходят 5000 (поскольку $185<1+\ldots+30 \leqslant S+a_i \leqslant 152+\ldots+181<5000$), следовательно, все они должны быть вычеркнуты. Получается, что вычеркнуто хотя бы $(181-k)+(k-29)=152$ числа, противоречие. $\square$

Задача 5/2. Аня выписала на доску все натуральные числа от 1 до 4000, а затем Боря стёр какие-то k из них. При каком наибольшем k можно гарантировать, что среди оставшихся на доске чисел обязательно найдётся 31 число, одно из которых равно сумме тридцати остальных?

Ответ: 117.

Задача 5/3. Аня выписала на доску все натуральные числа от 1 до 7000, а затем Боря стёр какие-то k из них. При каком наибольшем k можно гарантировать, что среди оставшихся на доске чисел обязательно найдётся 31 число, одно из которых равно сумме тридцати остальных?

Ответ: 217.

Задача 5/4. Аня выписала на доску все натуральные числа от 1 до 8000, а затем Боря стёр какие-то k из них. При каком наибольшем k можно гарантировать, что среди оставшихся на доске чисел обязательно найдётся 31 число, одно из которых равно сумме тридцати остальных?

Ответ: 251.

Задача 6/1. Даны две непересекающиеся окружности радиуса R. Прямая ℓ_1 пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Прямая ℓ_2 пересекает первую окружность в точках K и L, а вторую — в точках M и N. Известно, что

$$AB=BC=CD=14\,;$$

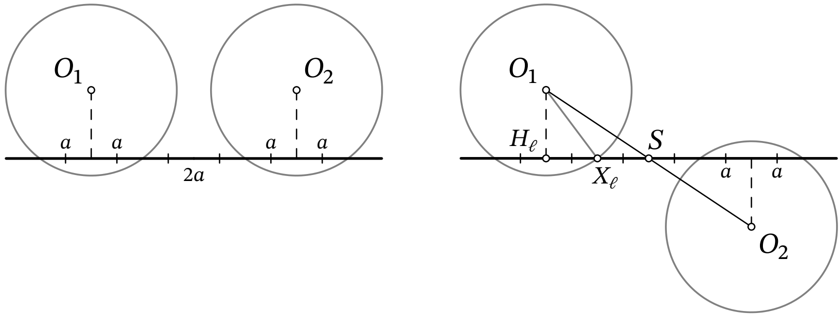
$$KL=LM=MN=6\,.$$

Найдите R.

Ответ: 13.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, а S — середина отрезка между центрами.

Рассмотрим одну из прямых ℓ_1 или ℓ_2, обозначим её за ℓ; пусть длина отрезков, которые на ней высекают точки пересечения с окружностями, равна $2a$. Так как окружности высекают на прямой равные хорды, то расстояния от центров окружностей до ℓ также равны: рассмотрев треугольник с вершинами в одной из точек пересечения окружности с прямой, центре окружности и проекции



(a) (b)

Рис. 2: к решению задачи 6/1

центра на прямую, из теоремы Пифагора получаем, что это расстояние равно $\sqrt{R^2 - a^2}$.

Если центры окружностей находятся с одной стороны от прямой ℓ, то O_1O_2 параллельна ей, и $O_1O_2 = 4a$ (рис 2a). Если же центры находятся по разные стороны от прямой, то она проходит через S (рис 2b). Обозначив проекцию O_1 на ℓ за H_ℓ, а одно из пересечений первой окружности с ℓ за X_ℓ, получаем

$$O_1O_2 = 2SO_1 = 2\sqrt{SH_\ell^2 + O_1H_\ell^2} = 2\sqrt{(2a)^2 + (O_1X_\ell^2 - a^2)} = 2\sqrt{3a^2 + R^2}\,.$$

Теперь ясно, что каждая из прямых ℓ_1 и ℓ_2 либо параллельна отрезку O_1O_2, либо проходит через его середину; но обе они быть параллельны не могут, так как тогда $O_1O_2 = 4 \cdot 7 = 4 \cdot 3$; и обе проходить через середину они тоже не могут, так как в этом случае $O_1O_2 = 2\sqrt{3 \cdot 7^2 + R^2} = 2\sqrt{3 \cdot 3^2 + R^2}$.

Значит, одна из них параллельна O_1O_2, а другая проходит через S. Меньшее a отвечает второму случаю, так как $2\sqrt{3a^2 + R^2} > 4a$ при $a < R$. Значит, первая прямая параллельна O_1O_2, а вторая проходит через S.

Тогда $4 \cdot 7 = O_1O_2 = 2\sqrt{3 \cdot 3^2 + R^2}$, то есть

$$16 \cdot 7^2 = 12 \cdot 3^2 + 4R^2\,,$$

откуда нетрудно извлечь $R = 13$. □

Задача 6/2. Даны две непересекающиеся окружности радиуса R. Прямая ℓ_1 пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Прямая ℓ_2 пересекает первую окружность в точках K и L, а вторую — в точках M и N. Известно, что

$$AB = BC = CD = 13\,;$$

$$KL = LM = MN = 8\,.$$

Найдите R.

Ответ: 11.

Задача 6/3. Даны две непересекающиеся окружности радиуса R. Прямая ℓ_1 пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Прямая ℓ_2 пересекает первую окружность в точках K и L, а вторую — в точках M и N. Известно, что

$$AB = BC = CD = 28\,;$$

$$KL = LM = MN = 12\,.$$

Найдите R.

Ответ: 26.

Задача 6/4. Даны две непересекающиеся окружности радиуса R. Прямая ℓ_1 пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Прямая ℓ_2 пересекает первую окружность в точках K и L, а вторую — в точках M и N. Известно, что

$$AB = BC = CD = 26\,;$$

$$KL = LM = MN = 16\,.$$

Найдите R.

Ответ: 22.