# Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2022

## Заключительный этап. 9 класс

**Задача 1.** Вова участвует в соревнованиях по стрельбе из лука, где ему нужно поразить цель на расстоянии $L = 200$ м. Под каким углом $\alpha$ к горизонту Вова должен стрелять из лука, чтобы попасть точно в середину мишени? При натяжении лука работа Вовы равна $A = 500$ Дж, КПД лука $\eta = 0,17$. Масса стрелы $m = 54$ г. В момент выстрела стрела находится на $h = 70$ см выше центра мишени. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с$^2$.

*Возможное решение*

Найдем начальную скорость стрелы, записав выражение для кинетической энергии стрелы:

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \eta A \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\eta A}{m}}.$$

Горизонтальная и вертикальная компоненты скорости стрелы соответственно равны $v_x = v\cos\alpha$ и $v_y = v\sin\alpha$.
Если стрела, вылетающая на высоте $h$ выше центра мишени, летит время $t$, то верно

$$v\cos\alpha \cdot t = L,$$

$$v\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = -h.$$

Выразив $\sin\alpha$, получим:

$$\cos\alpha = \frac{L}{vt} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{L}{vt}\right)^2} = \sqrt{\frac{v^2t^2 - L^2}{v^2t^2}}.$$

Подставим в нижнее уравнение и решим его относительно переменной $t^2$:

$$vt \cdot \sqrt{\frac{v^2t^2 - L^2}{v^2t^2}} = \frac{gt^2}{2} - h \Rightarrow$$

$$v^2t^2 - L^2 = h^2 - hgt^2 + \frac{g^2t^4}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{g^2t^4}{4} - (hg + v^2)t^2 + (h^2 + L^2) = 0 \Rightarrow$$

$$t_{1,2}^2 = \frac{(hg + v^2) \pm \sqrt{(hg + v^2)^2 - 4 \cdot \frac{g^2}{4}(h^2 + L^2)}}{2 \cdot \frac{g^2}{4}} \Rightarrow$$

$$t_1 = \pm 10{,}8 \text{ с}, \;\; t_2 \pm 3{,}8 \text{ с}.$$

При этом $t$ может не может иметь отрицательное значение. Тогда получаем, что Вова может пустить стрелу под двумя разными углами $\alpha_1$ и $\alpha_2$:

$$\cos\alpha_1 \approx 0{,}3,$$

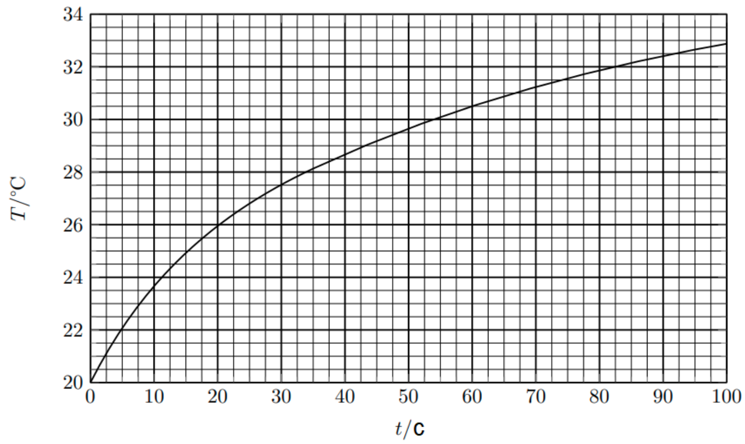
$$\cos\alpha_2 \approx 0{,}9.$$

*Критерии*

1. Получено выражение для скорости стрелы (+ 1 балл).
2. Записаны уравнения движения стрелы (+ 1 балл).
3. Получено уравнение для времени полета стрелы (+ 1 балл).
3. Найдены оба угла (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

**Задача 2.** В водонагревателе мощностью $P = 2,0$ кВт изначально находится вода массы $m_0$ и температуры $T_0 = 20°C$. Водонагреватель включают, и в этот же момент вода с той же температурой $T_1 = 20°C$ начинает поступать извне в нагреватель с постоянной скоростью, то есть масса поступающей извне воды в единицу времени постоянна и равна $\mu =$ Const (г/с). Когда нагреватель полностью наполняется водой, вода начинает вытекать из отверстия сверху. Температура вытекающей воды продолжает расти до установления на уровне $36°C$. График изменения температуры воды, вытекающей из нагревателя, показан на рисунке. Найдите начальную массу воды $m_0$ и массу поступающей извне воды в единицу времени $\mu$. Предположим, что, кроме вытекающей из нагревателя воды, потерь тепла нет, а вода в нагревателе всегда имеет одинаковую температуру. Удельная теплоемкость воды с = 4,2 кДж / (кг·К).




*Возможное решение*

Изначально температура поступившей извне воды равна температуре воды внутри водонагревателя и вода не вытекает. Поэтому температура воды изменяется только за счет тепла, полученного от нагревателя: $\Delta Q = cm_0\Delta T = P\Delta t$. Если момент времени $\Delta t$ достаточно мал, то получим наклон $\Delta T/\Delta t \approx 0,45\ °C/$с , который необходимо измерить на графике в момент времени $t = 0$. Наклон можно найти, проведя касательную на графике в начальный момент времени $t = 0$, которая примерно проходит через точку $T = 24,5°C$ и $t = 10$ с. Откуда получаем

$$m_0 = \frac{P}{c\frac{\Delta T}{\Delta t}} \approx 1,1 \text{ кг}.$$

Стабильная температура достигается, когда энергия, необходимая для нагрева вытекающей в единицу времени воды, равна мощности нагревателя. Тогда мы получаем соотношение $P = \mu c(T - T_0)$. Подставляя температуру $T = 36°C$, получим искомое значение $\mu$:

$$\mu = \frac{P}{c(T - T_0)} \approx 30 \text{ г/с}.$$

*Критерии*

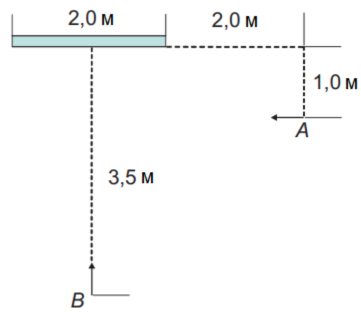
1. Найдено изменение температуры за малый промежуток времени (+ 2 балла).

2. Найдена масса воды (+ 1 балл).

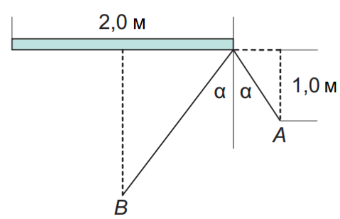
3. Найден массовый расход в единицу времени (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

**Задача 3.** На стене большой комнаты висит зеркало шириной 2,0 м. Первоначально человек $A$ стоит лицом к стене на расстоянии 2,0 м справа от правого края зеркала и 1,0 м от стены и начинает двигаться параллельно стене со скоростью 1,0 м/с в левую сторону. В этот же момент человек $B$ начинает двигаться со скоростью 1,0 м/с в сторону центра зеркала под прямым углом к плоскости зеркала. Изначально человек $B$ стоит на расстоянии 3,5 м от центра зеркала. Через какое время они увидят друг друга в зеркале? Закон отражения гласит, что угол падения равен углу отражения.




*Возможное решение*




Пусть два человека увидят друг друга в зеркале в момент времени $t$. К этому времени, человек $A$ преодолеет расстояние $2 - 1 \cdot t$, а человек $B$ - $3,5 - 1 \cdot t$. Из подобия треугольников получаем:

$$\frac{1}{3,5 - t} = \frac{2 - t}{1}.$$

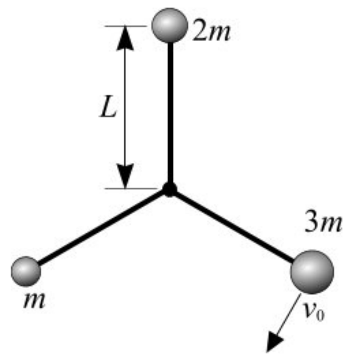
Решая полученное квадратное уравнение, получим ответ: $t = 1{,}5$ с.

*Критерии*

1. Найден закон изменения пути двух людей от времени (+ 2 балла).
2. Записано подобие трегольников (+ 2 балла).
3. Получен верный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

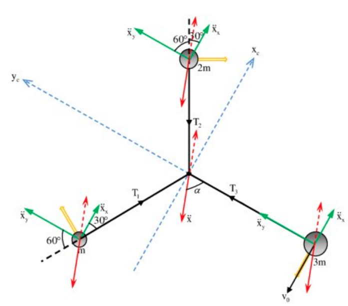
**Задача 4.** На концах трёх жёстких невесомых стержней длиной $L = 12$ см каждый закреплены три одинаковых по размеру маленьких шарика массами $m$, $2m$ и $3m$, где $m = 110$ г. Противоположные концы стержней соединены между собой в одной точке, вокруг которой они могут свободно вращаться. Первоначально вся система неподвижно лежит на гладкой горизонтальной поверхности; все углы между соседними стержнями равны $2\pi/3$. Коротким ударом шарику массой $3m$ сообщают скорость $v_0 = 4$ м/с, направленную перпендикулярно соответствующему стержню и параллельно поверхности. Найдите ускорения всех трёх шариков сразу после удара, считая их отличными от нуля.




*Возможное решение*

Поскольку стержни и точка их соединения невесомы, $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} = 0$. В свою очередь, углы между любыми двумя стержнями равны, поэтому

$$|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = |\vec{T_3}| = T$$



Расположим оси $x$ и $y$ так, как указано на рисунке, и перейдем в систему отсчета, связанную с точкой соединения стержней. Ускорение данной точки обозначим за $a$. Тогда можно записать баланс действующих сил для каждого из трех шариков в проекции на соответствующие стержни:

$$T_1 = ma_x \cos\frac{\pi}{6} - ma_y \cos\frac{\pi}{3},$$

$$T_2 = -2ma_x \cos\frac{\pi}{6} - 2ma_y \cos\frac{\pi}{3},$$

$$T_3 = 3ma_x + 3m\frac{v_0^2}{L}.$$

Данная система содержит три неизвестных, $T_1 = T_2 = T_3, a_x, a_y$. Решив систему, получим искомое

$$T_1 = \frac{6}{11}\frac{mv_0^2}{L}.$$

Тогда ускорения для шариков массой $m, 2m, 3m$ соответственно равны

$$a_1 = \frac{6}{11}\frac{v_0^2}{L},\ a_2 = \frac{3}{11}\frac{v_0^2}{L},\ a_3 = \frac{2}{11}\frac{v_0^2}{L}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$a_1 \approx 7,3 \text{ м/с},\ a_2 \approx 3,6 \text{ м/с},\ a_3 \approx 2,4 \text{ м/с}.$$

*Критерии*

1. Получено равенство сил $T_1, T_2, T_3$ (+ 1 балл).
2. Верно составлены уравнения на баланс сил для шариков (+ 3 балла).
3. Верно найдены ускорения шариков (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

**Задача 5.** Рассмотрим футбольный мяч, заполненный воздухом. Избыточное давление внутри мяча $\Delta p = 20$ кПа, радиус мяча $R = 10$ см и его масса $m = 400$ г. Можно пренебречь зависимостью избыточного давления от деформации шара и массы внутри шара. Материал, из которого сделан мяч, не растягивается.

1) Мяч зажали между двумя параллельными жесткими пластинами, расстояние между которыми равно $2R - 2h$ (так, что глубина деформации, на которую продавливается мяч, с каждой из двух сторон мяча равна $h = 1$ см). Найдите силу, с которой мяч давит на пластину.

2) Мяч движется со скоростью $v_0 = 2$ м/с и ударяется о твердую стенку. Найти максимальную глубину деформированного участка $h$ и время столкновения $t$. Считайте, что искомая величина $h$ значительно меньше радиуса мяча $R$.

*Возможное решение*

1) $F = \Delta p S$, где $S = \pi r^2$ — площадь поверхности сегмента контакта мяча и стенки. С помощью теоремы Пифагора можно найти радиус $r$: $r^2 = R^2 - (R-h)^2 = (2R-h)h$, поэтому

$$F = \Delta p \pi h(2R - h) \approx 120\ H.$$

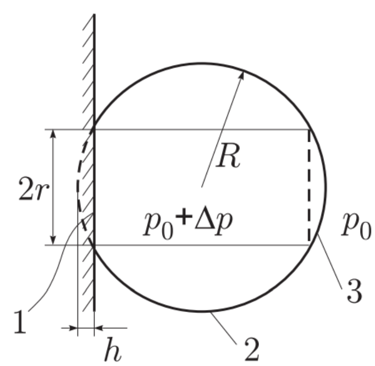
2) При ударе мяч деформируется так, как показано на рисунке: оболочка не растягивается, поэтому сохраняет сферическую форму (кроме мест соприкосновения со стенкой). Используя приближение $h \ll R$, можно пренебречь членом порядка $h^2$ в выражении для силы. Тогда сила пропорциональна $h$, т.е. мяч ведет себя как пружина с жесткостью $k = 2\pi R\Delta p$. Тогда можно воспользоваться законом сохранения энергии и выразить искомую величину $h$:

$$mv_0^2 = 2\pi R \Delta p h^2 \Rightarrow$$

$$h = v_0\sqrt{\frac{m}{2\pi R\Delta p}} \approx 11 \text{ мм}.$$

Искомое $t$ является половиной периода гармонических колебаний пружинного маятника с жесткостью $k = 2\pi R\Delta p$:

$$t = \pi\sqrt{\frac{m}{2\pi R\Delta p}} \approx 18 \text{ мс}.$$




*Критерии*

1. Найдена сила, с которой мяч давит на пластину (+ 1 балл).
2. Верно записан закон сохранения энергии для деформированного меча (+ 2 балл).
3. Найдена максимальная глубина деформации $h$ (+ 1 балл).
4. Найдено время столкновения $t$ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.