

Заключительный этап. 7 класс

Задача 1. На детской площадке стоят несимметричные качели-балансир. Про качели известно, что они представляют из себя рычаг, у которого точка опоры не обязательно находится посередине и у которого на одном плече установлены два сидения, а на другом - одно. Вася, Маша и Таня пришли на них кататься. Известно, что Таня и Маша весят одинаково, а Вася в полтора раза тяжелее Маши. Дети заметили, что если девочки займут сидения с одной стороны качелей относительно точки опоры, а Вася - с другой, то наступит равновесие. Пусть Таня сидит ближе к точке опоры качелей, чем Маша. Тогда Вася сидит в три раза дальше от точки опоры, чем Таня. Найдите отношение расстояния от Тани до Маши к расстоянию от Тани до точки опоры.

Возможное решение

Пусть l - расстояние от точки опоры до Васи, h - расстояние от точки опоры до Тани, x - расстояние от Тани до Маши, M_B - масса Васи, M_T - масса Тани, M_M - масса Маши.

Тогда запишем условие равновесия качелей:

$$M_B \cdot g \cdot l = M_T \cdot g \cdot h + M_M \cdot g \cdot (h + x) \Rightarrow x = \frac{M_B \cdot l - (M_T + M_M) \cdot h}{M_M}.$$

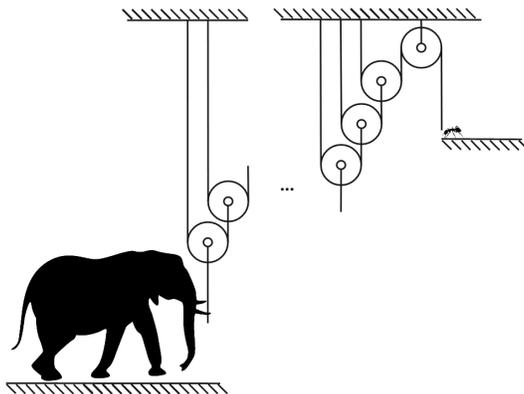
Тогда искомое отношение

$$\frac{x}{h} = \left(\frac{M_B}{M_M} \right) \cdot \frac{l}{h} - \left(\frac{M_T}{M_M} + 1 \right) = 1,5 \cdot 3 - (1 + 1) = 2,5.$$

Критерии

1. Расставлены силы и указаны плечи (+ 2 балла).
 2. Записано условие равновесия качелей (+ 2 балл).
 3. Получен верный ответ (+ 1 балл).
- Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Маленький муравей вертикально тянет веревку с силой 1 Н. Вевка перекинута через неподвижный блок, прикрепленный к потолку, и через подвижный блок соединена с потолком. К центру этого подвижного блока также прикреплена веревка, которая соединена с потолком через другой подвижный блок. Так цепочка подвижных блоков продолжается несколько раз, а к последнему блоку привязана веревка, за которую схватился слон. Слон тянет конец веревки с силой 5000 Н, также вертикально. Найдите наименьшее необходимое количество подвижных блоков для того, чтобы муравей смог перетянуть веревку на свою сторону. Блоки считать невесомыми, а веревку - нерастяжимой.



Возможное решение

Подвижный блок дает выигрыш в силе в два раза, поэтому, если подвижных блоков n , необходимая для поднятия груза сила в 2^n раз меньше, чем вес груза. Поэтому нужно найти такое число n , что при делении на 2^n 5000 Н окажется не больше 1 Н. То есть необходимо выполнение неравенства:

$$1 \text{ Н} > \frac{5000 \text{ Н}}{2^n}.$$

Минимальное такое число $n = 13$:

$$1 \text{ Н} > \frac{5000 \text{ Н}}{2^{13}} = \frac{5000 \text{ Н}}{8192}.$$

То есть 14 подвижных блоков являются избыточными, а 12 – недостаточно для выполнения неравенства.

Критерии

1. Описан принцип работы неподвижного блока (+ 2 балла).
 2. Доказано, что 13 - это минимальное число неподвижных блоков (+ 3 балла).
- Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. V_1 литров воды и V_2 литров этанола смешивают друг с другом так, что объем их раствора равен $V = 1$ дм³ и что массовая доля этанола в растворе равна $p = 0,441$. Из-за протекания химических реакций при смешивании этих жидкостей происходит сжатие $\gamma = 6\%$, то есть объем полученного раствора на 6% меньше, чем суммарный объем воды и этанола $V_1 + V_2$. Найдите объемы V_1 и V_2 . Плотность воды $\rho_1 = 1000$ кг/м³, этанола $\rho_2 = 790$ кг/м³.

Возможное решение

Выразим массовую долю этанола через массу воды m_1 и массу этанола m_2 :

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,441 \Rightarrow m_2 = 0,789m_1.$$

Запишем условие сжатия:

$$(V_1 + V_2) \cdot \frac{(100 - \gamma)}{100} = V \Rightarrow \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} = 1,064V.$$

Подставляя отношение масс жидкостей из первого уравнения во второе, выразим массу и объем воды:

$$m_1 = \frac{1,064V\rho_1\rho_2}{0,789\rho_1 + \rho_2} \Rightarrow V_1 = \frac{1,064V\rho_2}{0,789\rho_1 + \rho_2} = 532 \text{ см}^3.$$

Аналогично находим результат для объема этанола: $V_2 = 532 \text{ см}^3$.

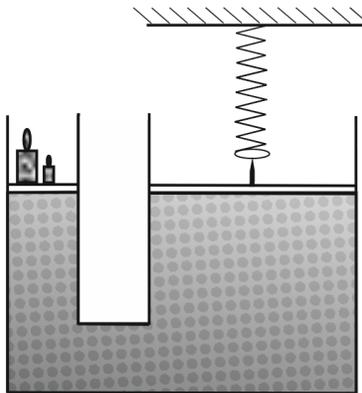
Критерии

1. Выражена масса воды или этанола (+ 3 балла).
2. Найдены искомые объемы воды и этанола (+ 2 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. К потолку прикреплена пружина, нижняя часть которой представляет собой горизонтальное проволочное кольцо с натянутой на него тонкой нерастяжимой пленкой. Снизу в пленку упирается игла – острый вертикальный стержень, нижний конец которого закреплен на большем поршне гидравлического пресса. Площадь поперечного сечения иглы $S_{\text{иглы}} = 4 \text{ мм}^2$, площади меньшего и большего поршней пресса $S_1 = 100 \text{ см}^2$ и $S_2 = 400 \text{ см}^2$. В начальный момент пружина не деформирована. Ученик начинает класть на меньший поршень маленькие грузики. Когда суммарная масса грузиков стала равна $m = 100 \text{ г}$, пленка лопнула. Найдите следующие величины:

- 1) Сдвиг Δx_1 меньшего поршня пресса от своего первоначального положения. Ответ выразите в сантиметрах.
- 2) Давление P , необходимое для разрушения пленки. Числовой ответ выразите в мегапаскалях.
Жесткость пружины равна $8 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$. Ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



Возможное решение

Пусть F_1 - сила, действующая на меньший поршень, F_2 - сила, создаваемая в большем поршне, S_1 и S_2 - площади меньшего и большего поршней соответственно. Тогда запишем Закон Паскаля в следующем виде:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}.$$

Запишем условие несжимаемости жидкости:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2,$$

где Δx_1 - смещение малого поршня, Δx_2 - смещение большого поршня.

Сила, с которой больший поршень давит на пленку, уравновешивается силой упругости пружины

$$F_2 = k \Delta x_2.$$

Тогда для первого пункта задачи имеем

$$F_1 \frac{S_2}{S_1} = F_2 = k \Delta x_2 = k \Delta x_1 \frac{S_1}{S_2},$$

$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k} \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 = \frac{mg}{k} \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 = \frac{0,1 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}}{8 \frac{\text{Н}}{\text{см}}} \left(\frac{400 \text{ см}^2}{100 \text{ см}^2} \right)^2 = 2 \text{ см}.$$

Запишем выражение для нахождения давления иглы на пленку:

$$P = \frac{F_2}{S_{\text{иглы}}}.$$

Тогда

$$P S_{\text{иглы}} = F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} = mg \frac{S_2}{S_1},$$

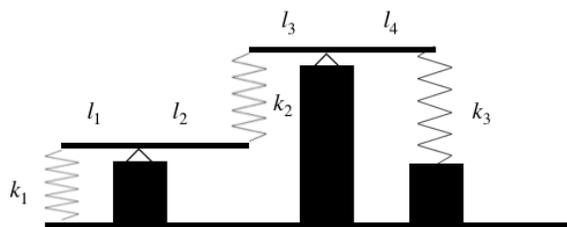
$$P = \frac{mg}{S_{\text{иглы}}} \frac{S_2}{S_1} = \frac{0,1 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}}{4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2} \cdot \frac{400 \text{ см}^2}{100 \text{ см}^2} = 1 \text{ МПа}.$$

Критерии

1. Записан закон Паскаля для гидравлического пресса (+ 1 балла).
2. Записано условие несжимаемости жидкости (+ 1 балл).
3. Записано условие равновесия пленки до разрыва (+ 1 балл).
4. Получено значение сдвига Δx_1 (+ 1 балл).
5. Получено значение давления P (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. К двум очень легким рычагам с точками опоры, расположенными на разной высоте, прикреплены пружины, как показано на рисунке. Жесткости пружин равны: $k_1 = k_2 = k_3$. Система находится в равновесии, рычаги расположены горизонтально, а деформации пружин имеют только вертикальные составляющие. Найдите модуль отношения деформации пружины k_3 к деформации пружины k_1 , если плечи рычагов соотносятся следующим образом: $l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 1 : 2 : 3 : 4$. Ответ округлите до третьей значащей цифры.



Возможное решение

Запишем равенства моментов:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2,$$

$$F_3 l_3 = F_4 l_4,$$

где $F_i = k \Delta_i$.

Учитывая равенство $F_2 = -F_3$ и соотношения длин плеч, получим:

$$F_2 = \frac{1}{2} F_1,$$

$$F_3 = -\frac{1}{2} F_1,$$

$$F_4 = -\frac{3}{8} F_1,$$

Тогда

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_1} = -\frac{3}{8}.$$

Критерии

1. Записаны условия равновесия рычагов в общем виде (+ 1 балл).
2. Записаны выражения для сил через деформации пружин (+ 1 балл).
3. Записано, что сила на правом плече первого рычага по модулю равна силе на левом плече второго рычага и противоположна ей по направлению (+ 1 балл).
4. Записаны отношения сил или деформаций с учетом длин плеч (+ 1 балл).
5. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.