Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2022

Заключительный этап. 10 класс

Задача 1. Вова участвует в соревнованиях по стрельбе из лука, где ему нужно поразить цель на расстоянии $L = 200$ м. Под каким углом α к горизонту Вова должен стрелять из лука, чтобы попасть точно в середину мишени? При натяжении лука работа Вовы равна $A = 500$ Дж, КПД лука $\eta = 0{,}17$. Масса стрелы $m = 54$ г. В момент выстрела стрела находится на $h = 70$ см выше центра мишени. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Возможное решение

Найдем начальную скорость стрелы, записав выражение для кинетической энергии стрелы:

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \eta A \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\eta A}{m}}.$$

Горизонтальная и вертикальная компоненты скорости стрелы соответственно равны $v_x = v\cos\alpha$ и $v_y = v\sin\alpha$.

Если стрела, вылетающая на высоте h выше центра мишени, летит время t, то верно

$$v\cos\alpha \cdot t = L,$$

$$v\sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = -h.$$

Выразив $\sin\alpha$, получим:

$$\cos\alpha = \frac{L}{vt} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{L}{vt}\right)^2} = \sqrt{\frac{v^2t^2 - L^2}{v^2t^2}}.$$

Подставим в нижнее уравнение и решим его относительно переменной t^2:

$$vt \cdot \sqrt{\frac{v^2t^2 - L^2}{v^2t^2}} = \frac{gt^2}{2} - h \Rightarrow$$

$$v^2t^2 - L^2 = h^2 - hgt^2 + \frac{g^2t^4}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{g^2t^4}{4} - (hg + v^2)t^2 + (h^2 + L^2) = 0 \Rightarrow$$

$$t_{1,2}^2 = \frac{(hg + v^2) \pm \sqrt{(hg + v^2)^2 - 4 \cdot \frac{g^2}{4}(h^2 + L^2)}}{2 \cdot \frac{g^2}{4}} \Rightarrow$$

$$t_1 = \pm 10{,}8\ c,\ \ t_2 \pm 3{,}8\ c.$$

При этом t может не может иметь отрицательное значение. Тогда получаем, что Вова может пустить стрелу под двумя разными углами α_1 и α_2:

$$\cos\alpha_1 \approx 0{,}3,$$

$$\cos\alpha_2 \approx 0{,}9.$$

Критерии

1. Получено выражение для скорости стрелы (+ 1 балл).

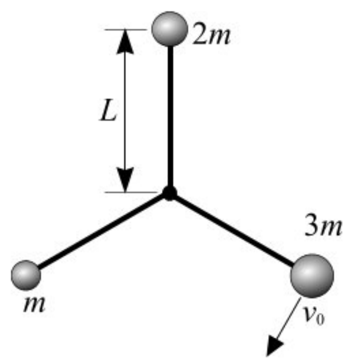
2. Записаны уравнения движения стрелы (+ 1 балл).

3. Получено уравнение для времени полета стрелы (+ 1 балл).

3. Найдены оба угла (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

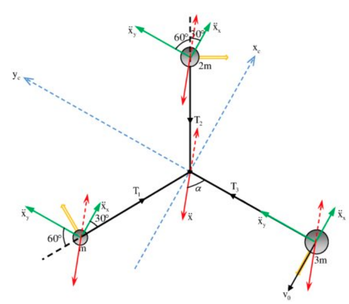
Задача 2. На концах трёх жёстких невесомых стержней длиной $L = 12$ см каждый закреплены три одинаковых по размеру маленьких шарика массами m, $2m$ и $3m$, где $m = 110$ г. Противоположные концы стержней соединены между собой в одной точке, вокруг которой они могут свободно вращаться. Первоначально вся система неподвижно лежит на гладкой горизонтальной поверхности; все углы между соседними стержнями равны $2\pi/3$. Коротким ударом шарику массой $3m$ сообщают горизонтальную скорость $v_0 = 4$ м/с, направленную перпендикулярно соответствующему стержню. Найдите ускорения всех трёх шариков сразу после удара, считая их отличными от нуля.



Возможное решение

Поскольку стержни и точка их соединения невесомы, $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} = 0$. В своб очередь, углы между любыми двумя стержнями равны между собой, поэтому

$$|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = |\vec{T_3}| = T.$$



Расположим оси x и y так, как указано на рисунке и перейдем в систему отсчета, связанную с точкой соединения стержней. Ускорение данной точки обозначим за a. Тогда можно записать баланс действующих сил для каждого из трех шариков в проекции на соответсвтующие стержни:

$$T_1 = ma_x \cos\frac{\pi}{6} - ma_y \cos\frac{\pi}{3},$$

$$T_2 = -2ma_x \cos\frac{\pi}{6} - 2ma_y \cos\frac{\pi}{3},$$

$$T_3 = 3ma_x + 3m\frac{v_0^2}{L}.$$

Данная система содержит три неизвестных, $T_1 = T_2 = T_3, a_x, a_y$. Решая систему относительно данных неизвестных, получим искомое

$$T_1 = \frac{6}{11}\frac{mv_0^2}{L}.$$

А значит ускорения для шариков массой $m, 2m, 3m$ соответственно равны:

$$a_1 = \frac{6}{11}\frac{v_0^2}{L},\ a_2 = \frac{3}{11}\frac{v_0^2}{L},\ a_3 = \frac{2}{11}\frac{v_0^2}{L}.$$

Подставляя численные значения, получим:

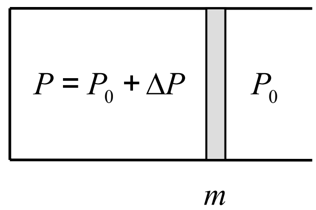
$$a_1 \approx 7,3 \text{ м/с},\ a_2 \approx 3,6 \text{ м/с},\ a_3 \approx 2,4 \text{ м/с}.$$

Критерии

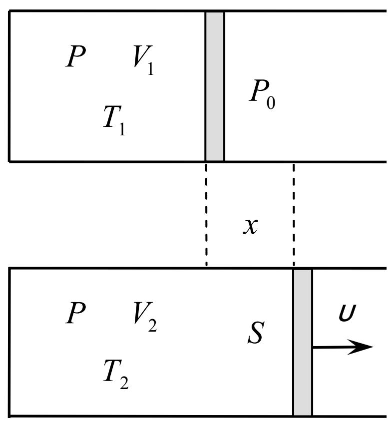
1. Получено равенство сил T_1, T_2, T_3(+ 1 балл).
2. Верно составлены уравнения на баланс сил для шариков (+ 3 балла).
3. Верно найдены ускорения шариков (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Вакуумная камера большого объёма заполнена воздухом при постоянном давлении $P_0 = 1$ кПа. В камере расположен длинный горизонтальный цилиндр, левый торец которого закрыт, а правый открыт в камеру. В цилиндре может скользить без трения поршень массой $m = 1{,}2$ кг. Между поршнем и левым торцом цилиндра находится идеальный одноатомный газ при давлении $P = P_0 + \Delta P$, где $\Delta P = 10$ Па. Поршень отпускают и начинают нагревать газ так, что его давление не меняется. К некоторому моменту времени к газу подвели количество теплоты $Q = 5$ Дж. Найдите скорость поршня v в этот момент. Числовой ответ выразите в см/с и округлите до целого значения. Процесс расширения газа считайте равновесным.



Возможное решение



Пусть ν — число молей газа, V_1 и V_2 — начальный и конечный объёмы, T_1 и T_2 — начальная и конечная температуры. Запишем первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A\,.$$

Приращение внутренней энергии газа равно:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\,\nu R\,(\,T_2 - T_1\,) = \frac{3}{2}\,P\,(\,V_2 - V_1\,) = \frac{3}{2}\,PSx\,,$$

где S и x — площадь и перемещение поршня. Работа постоянной силы давления газа на поршень равна:

$$A = PSx\,.$$

Получаем:

$$Q = \frac{5}{2}\,PSx = \frac{5}{2}\,(P_0 + \Delta P)Sx\,.$$

Запишем теперь второй закон Ньютона для поршня:

$$ma = PS - P_0S = \Delta PS\,.$$

Таким образом, поршень разгоняется с постоянным ускорением:

$$a = \frac{\Delta PS}{m}\,.$$

Для равноускоренного движения перемещение и скорость поршня связаны соотношением:

$$x = \frac{v^2}{2a} = \frac{mv^2}{2\Delta PS}\,.$$

Подставляя x в уравнение для Q, находим скорость поршня:

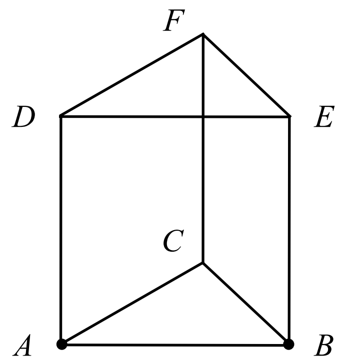
$$Q = \frac{5(P_0 + \Delta P)\,mv^2}{4\Delta P} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{4Q\,\Delta P}{5m\,(P_0 + \Delta P)}} = 18 \text{ см/с.}$$

Критерии

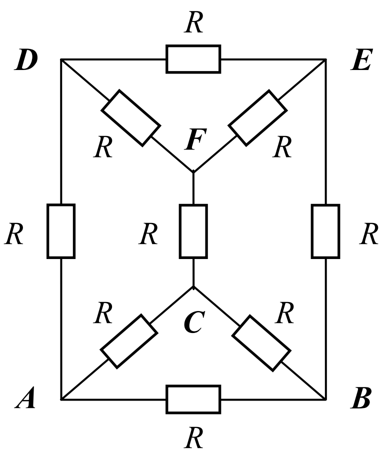
1. Верно получено выражение для Q из первого начала термодинамики (+ 2 балла).
2. Верно записан второй закон Ньютона для поршня (+ 1 балл).
3. Верно получена связь перемещения поршня с его скоростью (+ 1 балл).
4. Получен правильный численный ответ (+ 1 балл).

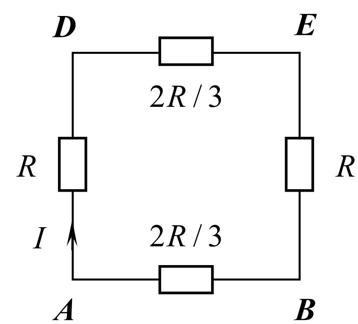
Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. Правильная треугольная призма, собранная из девяти одинаковых проволочных отрезков, подключёна к источнику постоянного напряжения за точки A и B. Найдите отношение $x = P/P_{EF}$, где P — тепловая мощность, выделяющаяся на всей призме, а P_{EF} — тепловая мощность, выделяющаяся на отрезке EF.



Возможное решение





Обозначим сопротивление одного отрезка через R и перерисуем призму в виде плоской схемы. Так как при подключении батареи к точкам A и B схема зеркально симметрична относительно прямой, задаваемой отрезком CF, распределение токов также обладает зеркальной симметрией. В частности, токи в ветвях AC и CB одинаковы. Отсюда следует, что по отрезку CF ток не течёт и этот отрезок можно убрать из схемы. Заменяя треугольники ABC и DEF эквивалентными сопротивлениями $2R/3$, получаем простую схему из четырёх сопротивлений. Сопротивление верней ветви $ADEB$ равно $8R/3$. Сила тока I, текущего по этой ветви, равна:

$$I = \frac{V}{8R/3} = \frac{3V}{8R},$$

где V — напряжение, поданное на точки A и B. Напряжение на участке DE:

$$V_{DE} = I \cdot \frac{2R}{3} = \frac{V}{4}.$$

Напряжение на отрезке EF в два раза меньше:

$$V_{EF} = \frac{V}{8}.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на этом отрезке:

$$P_{EF} = \frac{V_{EF}^2}{R} = \frac{V^2}{64R}.$$

Общее сопротивление призмы:

$$R_0 = \frac{(8R/3)\cdot(2R/3)}{(10R/3)} = \frac{8R}{15}.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на призме:

$$P = \frac{V^2}{R_0} = \frac{15V^2}{8R}.$$

Отношение мощностей:

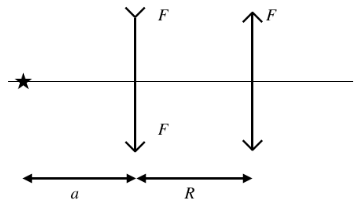
$$x = \frac{P}{P_{EF}} = \frac{15\cdot 64}{8} = 120.$$

Критерии

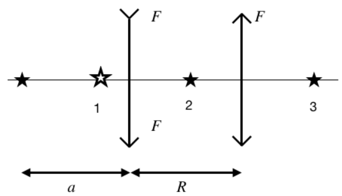
1. Верно получена эквивалентная схема призмы(+1 балл).
2. Верно найдено общее сопротивление призмы (+ 1 балл).
3. Верно найдена мощность, выделяющаяся во все призме (+ 1 балл).
4. Верно найдена мощность, выделяющаяся на участке EF (+ 1 балл).
5. Получен правильный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. Оптическая система состоит из источника, находящегося на главной оптической оси, составной линзы и собирающей линзы с фокусным расстоянием F. Оптические оси составной и собирающей линз совпадают. Верхняя половина составной линзы представляет собой половину рассеивающей линзы с фокусным рассоянием F, нижняя половина – половиной собирающей линзы с фокусным расстоянием F. Расстояние от объекта до составной линзы $a > F$. Расстояние между линзами равно R. Найдите расстояние от объекта до собирающей линзы, при условии что расстояние между линзами R – максимальное возможное расстояние, при котором система линз формирует два действительных изображения, находящихся на оптической оси. $F = 10$ см, $a = 30$ см.



Возможное решение



Рассмотрим изображения, возникающие в системе с единственной составной линзой.

Половина рассеивающей линзы формирует мнимое изображение 1 (см.рисунок), находящееся левее составной линзы, абсолютное значение расстояния от него до составной линзы b_1 дается формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b_1} = -\frac{1}{F},$$

$$b_1 = \frac{aF}{a+F}.$$

Нижняя половина составной линзы формирует действительное изображение 2 (см.рисунок) правее составной линзы, абсолютное значение расстояния до составной линзы b_2 также находится по формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F},$$

$$b_2 = \frac{aF}{a-F}.$$

Поместим в систему вторую линзу, расположив ее вплотную к первой линзе. В дальнейшем будем считать, что составная линза зафиксирована на оптической оси, все изменения расстояния между линзами происходят за счет перемещения собирающей линзы вдоль оптической оси.

Расходящийся пучок света, формируемый верхней половиной линзы, не будет фокусироваться в действительное изображение, пока расстояние от изображения 1 до собирающей линзы будет меньше фокусного расстояния F. Сходящийся пучок света, формируемый нижней половиной составной линзы, будет дополнительно фокусироваться собирающей линзой и формировать действительное изображение до тех пор, пока расстояние от собирающей линзы до составной будет меньше b_2.

Найдем расстояние между линзами, при котором собирающая линза начнет фокусировать расходящийся пучек от верхней половины составной линзы в изображение 3. Для этого необходимо, чтобы расстояние от мнимого изображения 1 до собирающей линзы было больше, чем фокусное расстояние собирающей линзы:

$$F < R + b_1 = R + \frac{aF}{a+F},$$

$$R > F - \frac{aF}{a+F} = \frac{F^2}{a+F} = R_1.$$

Сравним расстояния R_1 и b_2, чтобы определить, возможна ли ситуация формирования двух действительных изображений при $R < b_2$:

$$R_1 = \frac{F^2}{a+F} = \frac{aF^2 - F^3}{a^2 - F^2},$$

$$b_2 = \frac{a^2F + aF^2}{a^2 - F^2},$$

$$b_2 - R_1 = \frac{a^2F + F^3}{a^2 - F^2} > 0.$$

Таким образом, возможно формирование двух действительных изображений в системе при $R_1 < R < b_2$. При $R = b_2$ пучок от нижней половины фокусируется в центре собирающей линзы, а пучок от рассеивающей половинки – в некоторой точке, расстояние до которой от собирающей линзы b_3 получим из формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{b_1 + b_2} + \frac{1}{b_3} = \frac{1}{F},$$

$$\frac{1}{b_3} = \frac{1}{F} - \frac{a^2 - F^2}{2a^2F} = \frac{a^2 + F^2}{2a^2F},$$

$$b_3 = \frac{2a^2F}{a^2 + F^2}.$$

Рассмотрим дальнейшее увеличение расстояния от составной до собирающей линзы. При $R > b_2$ пучок от рассеивающей половинки по-прежнему фокусируется в изображение 3. Также в системе присутствует действительное изображение 2. Таким образом, существуют по меньшей мере два действительных изображения.

Однако, в этом случае на собирающую линзу попадает пучок от действительного изображения 2. Собирающая линза будет фокусировать этот пучок в еще одно действительное изображение, когда расстояние от нее до действительного изображения 2 будет больше фокусного расстояния линзы, или:

$$R > b_2 + F = F + \frac{aF}{a - F} = \frac{2aF - F^2}{a - F} = R_2.$$

После этого в системе будет 3 действительных изображения. Найдем расстояния c_1 и c_2 от двух изображений, получаемых собирающей линзой, до собирающей линзы, третье действительное изображение по-прежнему есть изображение 2. При условии $R > R_2$ получим:

$$\frac{1}{b_1 + R} + \frac{1}{c_1} = \frac{1}{F},$$

$$\frac{1}{R - b_2} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{F},$$

$$c_1 = \frac{F(b_1 + R)}{b_1 + R - F},$$

$$c_2 = \frac{F(R - b_2)}{R - b_2 - F}.$$

Ситуация, при которой действительные изображения будут находиться в двух точках возможна только тогда, когда $c_1 = c_2$:

$$\frac{(b_1 + R)}{b_1 + R - F} = \frac{F(R - b_2)}{R - b_2 - F}.$$

Таким образом, получим, что это равенство переходит в $b_2 = -b_1$, что невозможно. Откуда следует, что максимально возможное расстояние между линзами при условии, что действительные изображения находятся в двух точках, равно

$R_{max} = R_2 = \frac{2aF - F^2}{a - F} = 25$ см. Тогда искомое расстояние: $a + R_{max} = 55$ см.

Критерии

1. Указано, что составная линза формирует два изображения, одно из которых мнимое, другое - действительное (+ 1 балл).

2. Найдено положение каждого из изображений от составной линзы (+ 1 балла).

3. Указано, что для формирования действительных изображений в двух точках требуется фокусировка расходящегося пучка от рассеивающей половинки составной линзы (+ 1 балл).

4. Найдено условие на максимальное расстояние между линзами, при превышении которого появляется третье действительное изображение (+ 1 балл).

5. Показано, что после превышения максимального расстояние положения двух изображений справа от рассеивающей линзы никогда не совпадают (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.