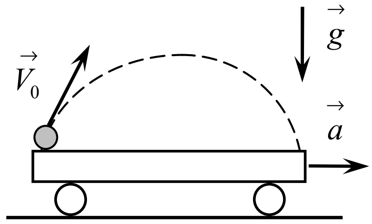
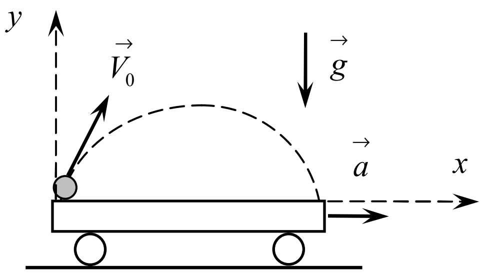
10.1/1. Массивная платформа длиной $L = 9$ м разгоняется с постоянным горизонтальным ускорением $a = 0,5$ м/с^2. С заднего края платформы бьют по мячу. Спустя время $\tau = 2$ с мяч падает на передний край. Найдите начальную скорость V_0 мяча относительно платформы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, векторы $\vec{a}$ и $\vec{V_0}$ лежат в одной вертикальной плоскости. Сопротивление воздуха не учитывайте. Ответ выразите в м/с и округлите до десятых.



Возможное решение



Рассмотрим движение мяча в системе отсчёта, связанной с платформой. Обозначим через $\vec{w}$ ускорение мяча в этой системе. По закону сложения ускорений:

$$\vec{g} = \vec{a} + \vec{w} \quad \rightarrow \quad \vec{w} = \vec{g} - \vec{a}$$

Выберем начало координат в той точке платформы, из которой мяч начал двигаться. Ось x направим вдоль вектора $\vec{a}$, ось y – вертикально вверх. Зависимость радиус-вектора мяча от времени определяется обычной формулой для равноускоренного движения:

$$\vec{r} = \vec{V_0}\, t + \frac{\vec{w}\, t^2}{2} = \vec{V_0}\, t + \frac{(\,\vec{g} - \vec{a}\,)\, t^2}{2}$$

В проекциях на координатные оси:

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t - \frac{a\, t^2}{2}$$

$$y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g\, t^2}{2}$$

В момент времени $t = \tau$ имеем: $x = L$, $y = 0$. Получаем:

$$L = V_0 \cos\alpha \cdot \tau - \frac{a\, \tau^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_0 \cos\alpha = \frac{2\, L + a\, \tau^2}{2\, \tau}$$

$$0 = V_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\, \tau^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_0 \sin\alpha = \frac{g\, \tau}{2}$$

Возводя получившиеся соотношения в квадрат и складывая их, находим V_0:

$$V_0 = \frac{1}{2\tau} \sqrt{(\, g\, \tau^2\,)^2 + (\, 2\, L + a\, \tau^2\,)^2}$$

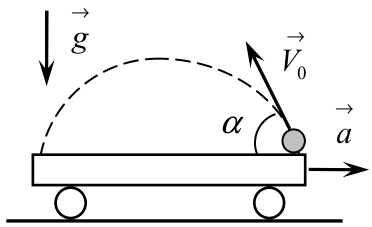
Подставим числовые значения:

$$V_0 = \frac{1}{4}\sqrt{40^2 + 20^2} = 5\sqrt{5} = 11,2 \text{ м/с}$$

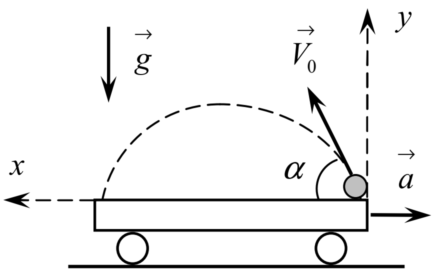
Ответ:

$$V_0 = \frac{1}{2\tau}\sqrt{(g\,\tau^2)^2 + (2\,L + a\,\tau^2)^2} = 11,2 \text{ м/с}$$

10.1/2. Массивная платформа длиной $L = 13$ м разгоняется с постоянным горизонтальным ускорением $a = 0,25$ м/с^2. С переднего края платформы бьют по мячу. Спустя время $\tau = 2$ с мяч падает на задний край. Найдите, под каким углом α к горизонту была направлена начальная скорость $\overrightarrow{V_0}$ мяча относительно платформы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{V_0}$ лежат в одной вертикальной плоскости. Сопротивление воздуха не учитывайте. Ответ выразите в градусах и округлите до целого значения.



Возможное решение



Рассмотрим движение мяча в системе отсчёта, связанной с платформой. Обозначим через $\overrightarrow{w}$ ускорение мяча в этой системе. По закону сложения ускорений:

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{w} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{g} - \overrightarrow{a}$$

Выберем начало координат в той точке платформы, из которой мяч начал двигаться. Ось x направим против вектора $\overrightarrow{a}$, ось y – вертикально вверх. Зависимость радиус-вектора мяча от времени определяется обычной формулой для равноускоренного движения:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{V_0}\,t + \frac{\overrightarrow{w}\,t^2}{2} = \overrightarrow{V_0}\,t + \frac{(\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{a}\,)\,t^2}{2}$$

В проекциях на координатные оси:

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t + \frac{a\,t^2}{2}$$

$$y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g\,t^2}{2}$$

В момент времени $t = \tau$ имеем: $x = L$, $y = 0$. Получаем:

$$L = V_0 \cos\alpha \cdot \tau + \frac{a\,\tau^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_0 \cos\alpha = \frac{2\,L - a\,\tau^2}{2\,\tau}$$

$$0 = V_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\,\tau^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_0 \sin\alpha = \frac{g\,\tau}{2}$$

Поделив получившиеся соотношения друг на друга, находим угол α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{g\,\tau^2}{2L - a\,\tau^2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{g\,\tau^2}{2\,L - a\,\tau^2}\right)$$

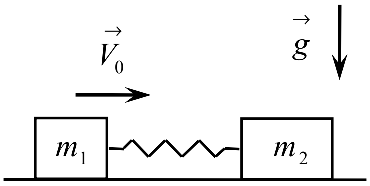
Подставим числовые значения:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{40}{25} = \operatorname{arctg}\frac{8}{5} = 58^\circ$$

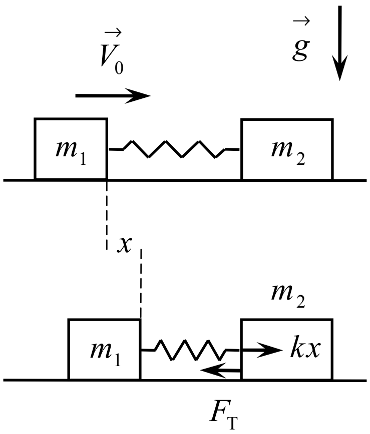
Ответ:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{g\,\tau^2}{2\,L - a\,\tau^2}\right) = 58^\circ$$

10.2/1. На горизонтальном столе лежат бруски 1 и 2, соединённые невесомой недеформированной пружиной жёсткостью $k = 90$ н/м. Массы брусков $m_1 = 0,15$ кг и $m_2 = 0,4$ кг. Коэффициент трения скольжения брусков по столу $\mu = 0,3$. Коротким ударом бруску 1 сообщают скорость, направленную вдоль пружины к бруску 2. Найдите максимальное значение V_0 этой скорости, при котором брусок 2 останется неподвижным. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Возможное решение



Рассмотрим случай, когда при движении бруска 1 брусок 2 остаётся неподвижным. Пусть брусок 1 сместился вправо на расстояние x. При этом сжатие пружины также равно x. На брусок 2 действует сила упругости $k\,x$ и сила трения покоя $F_\text{т}$. Так как брусок 2 неподвижен, то

$$k\,x = F_\text{т}$$

Сила трения покоя не превосходит своего максимального значения, равного силе трения скольжения:

$$F_\text{т} \le \mu\, m_2 g$$

Отсюда получаем ограничение на x:

$$k\,x \le \mu\, m_2 g$$

Это неравенство должно выполняться и при максимальном сжатии пружины x_m:

$$k\,x_m \le \mu\, m_2 g \quad \to \quad x_m \le \frac{\mu\, m_2 g}{k}$$

Для того чтобы связать x_m с начальной скоростью V_0, запишем уравнение баланса энергии для бруска 1. Учитывая, что при максимальном сжатии пружины брусок 1 останавливается, имеем:

$$\frac{k\,x_m^2}{2} - \frac{m_1 V_0^2}{2} = -\mu\, m_1 g\, x_m$$

В левой части стоит приращение механической энергии бруска 1, в правой части — работа силы трения скольжения. Выразим из этого уравнения V_0^2 :

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{k\, x_m^2}{2} + \mu\, m_1 g\, x_m = \frac{x_m}{2}\,(\, k\, x_m + 2\mu\, m_1 g\,) \quad \to \quad V_0^2 = \frac{x_m}{m_1}\,(\, k\, x_m + 2\mu\, m_1 g\,)$$

Используя найденное выше ограничение на x_m , получаем:

$$V_0^2 \le \frac{\mu\, m_2 g}{k\, m_1}(\,\mu\, m_2 g + 2\mu\, m_1 g\,) \;\to\; V_0^2 \le \frac{(\mu g)^2\, m_2}{k}\left(\frac{m_2}{m_1} + 2\right) \;\to\; V_0 \le \mu g \sqrt{\frac{m_2}{k}\left(\frac{m_2}{m_1} + 2\right)}$$

Как видно, значения начальной скорости, при которых брусок 2 остаётся неподвижным, ограничены сверху. Максимальное значение V_0 равно:

$$V_0 = \mu g \sqrt{\frac{m_2}{k}\left(\frac{m_2}{m_1} + 2\right)}$$

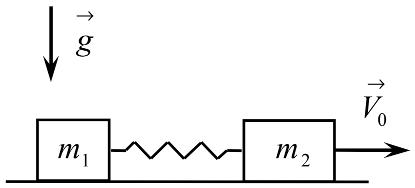
Подставим числовые значения:

$$V_0 = 3\sqrt{\frac{0,4}{90}\left(\frac{0,4}{0,15} + 2\right)} = \sqrt{0,04\left(\frac{40}{15} + 2\right)} = 0,2\sqrt{\frac{14}{3}} = 0,43 \text{ м/с}$$

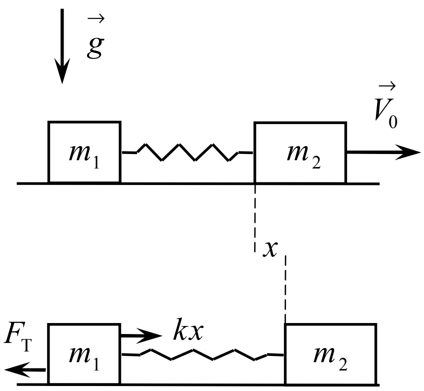
Ответ:

$$V_0 = \mu g \sqrt{\frac{m_2}{k}\left(\frac{m_2}{m_1} + 2\right)} = 0,43 \text{ м/с}$$

10.2/2. На горизонтальном столе лежат бруски 1 и 2, соединённые невесомой недеформированной пружиной жёсткостью $k = 60$ н/м. Массы брусков $m_1 = 0,2$ кг и $m_2 = 0,35$ кг. Коэффициент трения скольжения брусков по столу $\mu = 0,4$. Коротким ударом бруску 2 сообщают скорость, направленную вдоль пружины от бруска 1. Найдите минимальное значение V_0 этой скорости, при котором брусок 1 начнёт двигаться. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Возможное решение



Рассмотрим случай, когда при движении бруска 2 брусок 1 остаётся неподвижным. Пусть брусок 2 сместился вправо на расстояние x. При этом удлинение пружины также равно x. На брусок 1 действует сила упругости $k\,x$ и сила трения покоя $F_{\text{Т}}$. Так как брусок 1 неподвижен, то

$$k\,x = F_{\text{Т}}$$

Сила трения покоя не превосходит своего максимального значения, равного силе трения скольжения:

$$F_{\text{Т}} \le \mu\, m_1 g$$

Отсюда получаем ограничение на x:

$$k\,x \le \mu\, m_1 g$$

Это неравенство должно выполняться и при максимальном удлинении пружины x_m:

$$k\,x_m \le \mu\, m_1 g \quad \rightarrow \quad x_m \le \frac{\mu\, m_1 g}{k}$$

Для того чтобы связать x_m с начальной скоростью V_0, запишем уравнение баланса энергии для бруска 2. Учитывая, что при максимальном удлинении пружины брусок 2 останавливается, имеем:

$$\frac{k\,x_m^2}{2} - \frac{m_2 V_0^2}{2} = -\mu\, m_2 g\, x_m$$

В левой части стоит приращение механической энергии бруска 2, в правой части — работа силы трения скольжения. Выразим из этого уравнения V_0^2:

$$\frac{m_2 V_0^2}{2} = \frac{k\,x_m^2}{2} + \mu\, m_2 g\, x_m = \frac{x_m}{2}\,(\,k\,x_m + 2\mu\, m_2 g\,) \quad \rightarrow \quad V_0^2 = \frac{x_m}{m_2}\,(\,k\,x_m + 2\mu\, m_2 g\,)$$

Используя найденное выше ограничение на x_m, получаем:

$$V_0^2 \leq \frac{\mu\, m_1 g}{k\, m_2}(\,\mu\, m_1 g + 2\mu\, m_2 g\,) \;\rightarrow\; V_0^2 \leq \frac{(\mu g)^2\, m_1}{k}\left(\frac{m_1}{m_2}+2\right) \;\rightarrow\; V_0 \leq \mu g\sqrt{\frac{m_1}{k}\left(\frac{m_1}{m_2}+2\right)}$$

Как видно, значения начальной скорости, при которых брусок 1 остаётся неподвижным, ограничены сверху. Поэтому минимальное значение V_0, при котором брусок 1 начнёт двигаться, определяется правой частью последнего неравенства:

$$V_0 = \mu g\sqrt{\frac{m_1}{k}\left(\frac{m_1}{m_2}+2\right)}$$

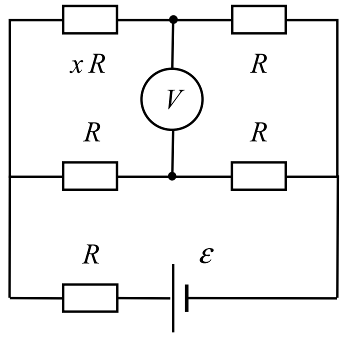
Подставим числовые значения:

$$V_0 = 4\sqrt{\frac{0,2}{60}\left(\frac{0,2}{0,35}+2\right)} = 4\sqrt{\frac{0,01}{3}\left(\frac{4}{7}+2\right)} = 0,4\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{7}} = 0,4\sqrt{\frac{6}{7}} = 0,37 \text{ м/с}$$

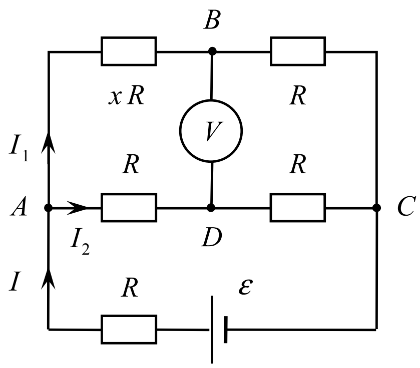
Ответ:

$$V_0 = \mu g\sqrt{\frac{m_1}{k}\left(\frac{m_1}{m_2}+2\right)} = 0,37 \text{ м/с}$$

10.3/1. Электрическая цепь состоит из батареи с эдс $\varepsilon = 8$ В, идеального вольтметра, четырёх одинаковых сопротивлений R и переменного сопротивления xR. Множитель x подобран так, что тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении xR, максимальна. Найдите напряжение V, которое в этом случае показывает вольтметр. Ответ выразите в вольтах и округлите до сотых. Внутреннее сопротивление батареи не учитывайте.



Возможное решение



Так как сопротивление вольтметра бесконечно велико, ток через него не идёт и при вычислении токов вольтметр можно не учитывать. Найдём сначала ток I, текущий через батарею. Общее сопротивление цепи равно:

$$R_0 = R + \frac{(x+1)R \cdot 2R}{(x+1)R + 2R} = R\left(1 + \frac{2x+2}{x+3}\right) = \frac{R(3x+5)}{x+3}$$

Для тока получаем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{\varepsilon(x+3)}{R(3x+5)}$$

Обозначим через I_1 и I_2 токи, текущие в ветвях ABC и ADC. В узле A имеем:

$$I_1 + I_2 = I$$

Приравнивая напряжения между точками A и C, получаем:

$$I_1(x+1)R = I_2 \cdot 2R \quad \to \quad I_2 = \frac{I_1(x+1)}{2}$$

Из полученных уравнений находим токи I_1 и I_2:

$$I_1 + \frac{I_1(x+1)}{2} = I \quad \to \quad I_1 = \frac{2I}{x+3} = \frac{2\varepsilon}{R(3x+5)}, \quad I_2 = \frac{\varepsilon(x+1)}{R(3x+5)}$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении xR, равна:

$$P = I_1^2\, xR = \frac{4\,\varepsilon^2 x}{R\,(\,3\,x+5\,)^2}$$

Преобразуем это выражение:

$$P = \frac{4\,\varepsilon^2}{3\,R} \cdot \frac{3\,x+5-5}{(\,3\,x+5\,)^2} = \frac{4\,\varepsilon^2}{3\,R}\left(\frac{1}{3\,x+5} - \frac{5}{(\,3\,x+5\,)^2}\right)$$

Введём новую переменную y:

$$y = \frac{1}{3\,x+5}$$

Мощность представляется квадратным трёхчленом относительно этой переменной:

$$P = \frac{4\,\varepsilon^2}{3\,R} \cdot (\,y - 5\,y^2\,)$$

Максимум мощности достигается при $y = 1/10$. Найдём соответствующее значение x:

$$\frac{1}{3\,x+5} = \frac{1}{10} \quad \to \quad 3\,x+5 = 10 \quad \to \quad x = \frac{5}{3}$$

Вычислим токи I_1 и I_2 при этом значении x:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{5\,R}\,, \quad I_2 = \frac{4\,\varepsilon}{15\,R}$$

Напряжение на вольтметре выразим через потенциалы точек B, C и D:

$$V = \varphi_D - \varphi_B = \varphi_D - \varphi_C + \varphi_C - \varphi_B$$

С учётом направлений токов имеем:

$$\varphi_D - \varphi_C = I_2 R\,, \quad \varphi_C - \varphi_B = -I_1 R$$

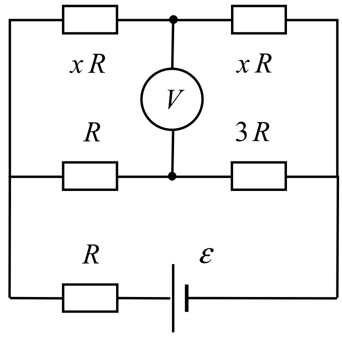
Окончательно получаем:

$$V = (\,I_2 - I_1\,)\,R = \frac{\varepsilon}{15} = 0,53 \text{ В}$$

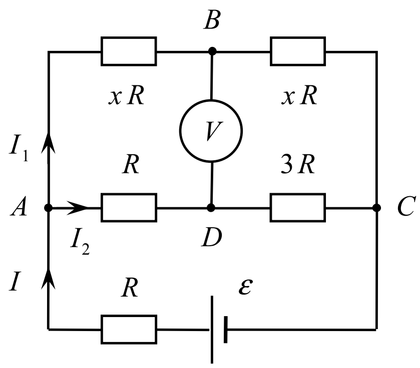
Ответ:

$$V = \frac{\varepsilon}{15} = 0,53 \text{ В}$$

10.3/2. Электрическая цепь состоит из батареи с эдс ε, идеального вольтметра, двух сопротивлений R, одного сопротивления $3R$ и двух переменных сопротивлений xR. Множитель x подобран так, что напряжение на вольтметре $V = \varepsilon/7$. Найдите отношение k суммарной тепловой мощности P, выделяющейся на сопротивлениях xR, к максимальной величине этой мощности P_m: $k = P/P_m$. Ответ округлите до сотых. Внутреннее сопротивление батареи не учитывайте.



Возможное решение



Так как сопротивление вольтметра бесконечно велико, ток через него не идёт и при вычислении токов вольтметр можно не учитывать. Найдём сначала ток I, текущий через батарею. Общее сопротивление цепи равно:

$$R_0 = R + \frac{2\,x\,R \cdot 4\,R}{2\,x\,R + 4\,R} = R\left(1 + \frac{4\,x}{x+2}\right) = \frac{R\,(\,5\,x+2\,)}{x+2}$$

Для тока получаем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{\varepsilon\,(\,x+2\,)}{R\,(\,5\,x+2\,)}$$

Обозначим через I_1 и I_2 токи, текущие в ветвях ABC и ADC. В узле A имеем:

$$I_1 + I_2 = I$$

Приравнивая напряжения между точками A и C, получаем:

$$I_1 \cdot 2\,x\,R = I_2 \cdot 4\,R \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{I_1\,x}{2}$$

Из полученных уравнений находим токи I_1 и I_2:

$$I_1 + \frac{I_1\,x}{2} = I \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{2\,I}{x+2} = \frac{2\,\varepsilon}{R\,(\,5\,x+2\,)}\,, \quad I_2 = \frac{\varepsilon\,x}{R\,(\,5\,x+2\,)}$$

Суммарная тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлениях xR, равна:

$$P = 2\,I_1^2\,xR = \frac{8\,\varepsilon^2 x}{R\,(\,5\,x+2\,)^2}$$

Преобразуем это выражение:

$$P = \frac{8\,\varepsilon^2}{5\,R} \cdot \frac{5\,x+2-2}{(\,5\,x+2\,)^2} = \frac{8\,\varepsilon^2}{5\,R}\left(\frac{1}{5\,x+2} - \frac{2}{(\,5\,x+2\,)^2}\right)$$

Введём новую переменную y:

$$y = \frac{1}{5\,x+2}$$

Мощность представляется квадратным трёхчленом относительно этой переменной:

$$P = \frac{8\,\varepsilon^2}{5\,R} \cdot (\,y - 2\,y^2\,)$$

Максимум мощности достигается при $y_m = 1/4$. Максимальная мощность равна:

$$P_m = \frac{8\,\varepsilon^2}{5\,R}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{16}\right) = \frac{\varepsilon^2}{5\,R}$$

Напряжение на вольтметре выразим через потенциалы точек A, B и D:

$$V = \varphi_D - \varphi_B = \varphi_D - \varphi_A + \varphi_A - \varphi_B$$

С учётом направлений токов имеем:

$$\varphi_D - \varphi_A = -I_2 R\,, \quad \varphi_A - \varphi_B = I_1 \cdot x\,R$$

Получаем:

$$V = (\,I_1 x - I_2\,)\,R = \frac{\varepsilon\,x}{5\,x+2}$$

Найдём значение x, при котором $V = \varepsilon/7$:

$$\frac{\varepsilon\,x}{5\,x+2} = \frac{\varepsilon}{7} \quad \rightarrow \quad 7\,x = 5\,x+2 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

Соответствующее значение мощности равно:

$$P = \frac{8\,\varepsilon^2}{5\,R}\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{49}\right) = \frac{8\,\varepsilon^2}{49\,R}$$

Для отношения мощностей получаем:

$$k = \frac{P}{P_m} = \frac{40}{49} = 0,82$$

Ответ:

$$k = \frac{40}{49} = 0,82$$

10.4. В закрытом сосуде находится влажный воздух при температуре $T = 338$ К и давлении $P = 0,1$ МПа. Плотность воздуха $\rho = 0,97$ кг/м^3. Найдите относительную влажность воздуха φ. Давление насыщенного водяного пара при температуре T равно $P_н = 25,0$ кПа; молярная масса сухого воздуха $\mu_1 = 29$ г/моль, молярная масса воды $\mu_2 = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль К). Ответ выразите в процентах и округлите до целого значения.

Возможное решение

Будем считать влажный воздух газовой смесью, состоящей из сухого воздуха и водяного пара. Пусть V — объём сосуда, m_1 и m_2 — массы сухого воздуха и пара, P_1 и P_2 — их парциальные давления. Из уравнения состояния имеем:

$$P_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT \quad \to \quad m_1 = \frac{\mu_1 P_1 V}{RT}$$

$$P_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT \quad \to \quad m_2 = \frac{\mu_2 P_2 V}{RT}$$

Плотность влажного воздуха равна:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2}{RT} \quad \to \quad \rho RT = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$$

Давление влажного воздуха:

$$P = P_1 + P_2$$

Исключая из полученных соотношений P_1, находим парциальное давление пара P_2:

$$P_1 = P - P_2$$

$$\rho RT = \mu_1(P - P_2) + \mu_2 P_2 \quad \to \quad P_2 = \frac{\mu_1 P - \rho RT}{\mu_1 - \mu_2}$$

Относительная влажность воздуха равна:

$$\varphi = \frac{P_2}{P_н} = \frac{\mu_1 P - \rho RT}{(\mu_1 - \mu_2)P_н}$$

Подставим числовые значения:

$$\varphi = \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 - 0,97 \cdot 8,31 \cdot 3,38 \cdot 10^2}{11 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^3} = \frac{29 - 0,97 \cdot 8,31 \cdot 3,38}{1,1 \cdot 2,5} = 0,64 = 64~\%$$

Ответ:

$$\varphi = \frac{\mu_1 P - \rho RT}{(\mu_1 - \mu_2)P_н} = 64~\%$$

10.5. В море плавает бутылка, закупоренная пробкой. Давление внутри бутылки $1,5$ *атм.* На какой глубине пробка сможет пролезть в бутылку, если для этого потребуется преодолеть силу трения в 10 *Н*, а площадь сечения горлышка 2 *см*^{2}? Решите задачу, учитывая что на поверхности температура воды равна 24^oC и падает с глубиной на 1^oC за каждые 10 метров. Считайте, что в каждый момент времени температура воздуха в бутылке равна температуре окружающей ее воды. Атмосферное давление возьмите равным 10^5 *Па*, плотность воды $1024\frac{кг}{м^3}$, $g = 9,8\ \frac{м}{с^2}$.

Возможное решение

1) Пробка пролезет в бутылку, если сила давления на пробку снаружи будет больше чем сила давления внутри и сила трения со стороны бутылки. $p_0 + \rho g h > p_2 + F/S$, где p_2 – давление внутри бутылки на глубине h, p_0 – атмосферное давление.

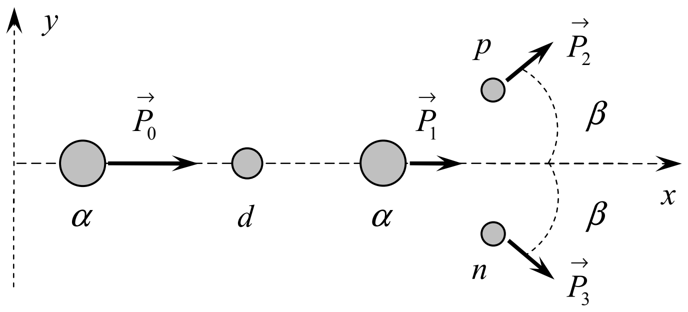
2) Поскольку объем бутылки на меняется при погружении, то $p \propto T$:
$\frac{p_2}{p_1} = \frac{297-ah}{297}$, где $a = 0,1$ К/м, p_1 – давление внутри бутылки, когда она плавала на поверхности.

3) Подставим значения, получим: $h > 9,915$ м.

Ответ : $9,915$ м (Ответ 10 м и варианты правильного округления более точного значения считаются верными)

10.6/1. Дейтрон представляет собой простейшее ядро, состоящее из протона и нейтрона. Пусть в результате неупругого столкновения α-частицы с неподвижным дейтроном α-частица продолжает двигаться в прежнем направлении, а протон и нейтрон, входившие в состав дейтрона, разлетаются симметрично относительно этого направления под углом $\beta = 60°$ к нему (каждая частица — протон и нейтрон — движется под углом β к направлению движения α-частицы). Найдите минимальное значение K начальной кинетической энергии α-частицы, при котором такой процесс разрешён законами сохранения энергии и импульса. Ответ выразите в виде отношения $x = K/E$, где E — энергия связи дейтрона (это минимальная энергия, которую необходимо затратить для того, чтобы разрушить дейтрон и высвободить протон и нейтрон). Считайте, что масса α-частицы в 4 раза больше массы протона, а массы протона и нейтрона одинаковы.

Возможное решение



На рисунке буквами α, d, p и n обозначены α-частица, дейтрон, протон и нейтрон. Пусть $\overrightarrow{P_0}$ и $\overrightarrow{P_1}$ — начальный и конечный импульсы α-частицы, $\overrightarrow{P_2}$ и $\overrightarrow{P_3}$ — импульсы протона и нейтрона. Массу протона обозначим через m; масса α-частицы равна $4\,m$. Запишем закон сохранения импульса:

$$\overrightarrow{P_0} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3}$$

Направим ось x неподвижной системы координат вдоль вектора $\overrightarrow{P_0}$, ось y — в перпендикулярном направлении. В проекциях на оси имеем:

$$P_2 \sin\beta = P_3 \sin\beta \quad \to \quad P_2 = P_3\,,$$

$$P_0 = P_1 + P_2\cos\beta + P_3\cos\beta = P_1 + 2\,P_2\cos\beta \quad \to \quad P_1 = P_0 - 2\,P_2\cos\beta$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{P_0^2}{8\,m} = \frac{P_1^2}{8\,m} + 2\cdot\frac{P_2^2}{2\,m} + E \quad \to \quad P_0^2 = P_1^2 + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E$$

Подставляя сюда выражение для P_1, получаем квадратное уравнение для импульса P_2:

$$P_0^2 = (\,P_0 - 2\,P_2\cos\beta\,)^2 + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E\,,$$

$$P_0^2 = P_0^2 - 4\,P_0\,P_2\cos\beta + 4\,P_2^2\cos^2\beta + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E\,,$$

$$(\,2 + \cos^2\beta\,)\,P_2^2 - P_0\cos\beta\,P_2 + 2\,m\,E = 0$$

Дискриминант уравнения равен:

$$D = P_0^2\cos^2\beta - 4\,(\,2 + \cos^2\beta\,)\cdot 2\,m\,E$$

Условие существования действительных корней уравнения:

$$D \geq 0 \quad \to \quad P_0^2 \geq \frac{8\,m\,E\,(\,2 + \cos^2\beta\,)}{\cos^2\beta}$$

Для начальной кинетической энергии α-частицы получаем неравенство:

$$K = \frac{P_0^2}{8\,m} \geq \frac{E\,(\,2 + \cos^2\beta\,)}{\cos^2\beta}$$

Минимальное значение кинетической энергии:

$$K = \frac{E\,(\,2 + \cos^2\beta\,)}{\cos^2\beta}$$

Соответствующее значение отношения K/E:

$$x = \frac{K}{E} = \frac{2 + \cos^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{2}{\cos^2\beta} + 1 = 2\,(\,\mathrm{tg}^2\beta + 1\,) + 1 = 2\,\mathrm{tg}^2\beta + 3$$

При $\beta = 60^\circ$ получаем:

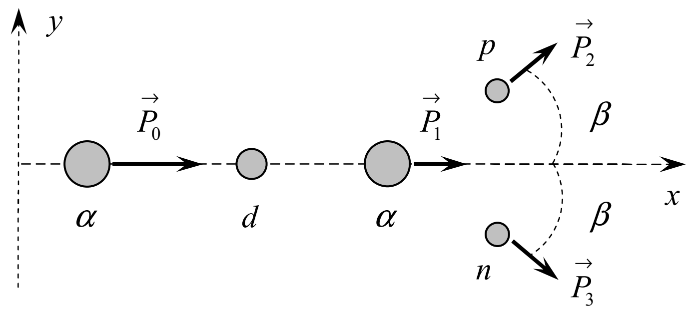
$$x = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$

Ответ:

$$x = 2\,\mathrm{tg}^2\beta + 3 = 9$$

10.6/2. Дейтрон представляет собой простейшее ядро, состоящее из протона и нейтрона. Пусть в результате неупругого столкновения α-частицы с неподвижным дейтроном α-частица продолжает двигаться в прежнем направлении, а протон и нейтрон, входившие в состав дейтрона, разлетаются симметрично относительно этого направления под углом β к нему (каждая частица — протон и нейтрон — движется под углом β к направлению движения α-частицы). Найдите максимально возможное значение угла β, совместимое с законами сохранения энергии и импульса. Известно отношение x начальной кинетической энергии K α-частицы к энергии связи дейтрона E: $x = K/E = 4$ (энергия связи - это минимальная энергия, которую необходимо затратить для того, чтобы разрушить дейтрон и высвободить протон и нейтрон). Ответ выразите в градусах и округлите до целого значения. Считайте, что масса α-частицы в 4 раза больше массы протона, а массы протона и нейтрона одинаковы.

Возможное решение



На рисунке буквами α, d, p и n обозначены α-частица, дейтрон, протон и нейтрон. Пусть $\overrightarrow{P_0}$ и $\overrightarrow{P_1}$ — начальный и конечный импульсы α-частицы, $\overrightarrow{P_2}$ и $\overrightarrow{P_3}$ — импульсы протона и нейтрона. Массу протона обозначим через m; масса α-частицы равна $4\,m$. Запишем закон сохранения импульса:

$$\overrightarrow{P_0} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3}$$

Направим ось x неподвижной системы координат вдоль вектора $\overrightarrow{P_0}$, ось y — в перпендикулярном направлении. В проекциях на оси имеем:

$$P_2 \sin\beta = P_3 \sin\beta \quad \to \quad P_2 = P_3\,,$$

$$P_0 = P_1 + P_2\cos\beta + P_3\cos\beta = P_1 + 2\,P_2\cos\beta \quad \to \quad P_1 = P_0 - 2\,P_2\cos\beta$$

Так как $P_1 < P_0$, из последнего соотношения следует, что $\cos\beta > 0$.

Далее воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{P_0^2}{8\,m} = \frac{P_1^2}{8\,m} + 2\cdot\frac{P_2^2}{2\,m} + E \quad \to \quad P_0^2 = P_1^2 + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E$$

Подставляя сюда выражение для P_1, получаем квадратное уравнение для импульса P_2:

$$P_0^2 = (\,P_0 - 2\,P_2\cos\beta\,)^2 + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E\,,$$

$$P_0^2 = P_0^2 - 4\,P_0\,P_2\cos\beta + 4\,P_2^2\cos^2\beta + 8\,P_2^2 + 8\,m\,E\,,$$

$$(\,2 + \cos^2\beta\,)\,P_2^2 - P_0\cos\beta\,P_2 + 2\,m\,E = 0$$

Дискриминант уравнения равен:

$$D = P_0^2\cos^2\beta - 4\,(\,2 + \cos^2\beta\,)\cdot 2\,m\,E$$

Перепишем это выражение через отношение x:

$$x = \frac{K}{E} = \frac{P_0^2}{8\,m\,E} \quad \to \quad D = 8\,m\,E\,(\,(\,x-1\,)\cos^2\beta - 2\,)$$

Из условия существования действительных корней уравнения получаем ограничение на угол β:

$$D \geq 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)\cos^2\beta - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \cos^2\beta \geq \frac{2}{x-1}$$

Так как $\cos\beta > 0$, то:

$$\cos\beta \geq \sqrt{\frac{2}{x-1}} \quad \rightarrow \quad \beta \leq \arccos\sqrt{\frac{2}{x-1}}$$

Максимальное значение β равно:

$$\beta = \arccos\sqrt{\frac{2}{x-1}}$$

При $x = 4$ получаем:

$$\beta = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} = 35^\circ$$

Ответ:

$$\beta = \arccos\sqrt{\frac{2}{x-1}} = 35^\circ$$