8 класс

Задача 8.1. Страна имеет форму квадрата и разделена на 25 одинаковых квадратных графств. В каждом графстве правит либо граф-рыцарь, который всегда говорит правду, либо граф-лжец, который всегда лжет. Однажды каждый граф сказал: «Среди моих соседей поровну рыцарей и лжецов.» Какое максимальное число рыцарей могло быть? (Графы являются соседями, если их графства имеют общую сторону.)

Ответ: 8.

Решение. См. решение задачи **??**. □

Задача 8.2. Определите все пары натуральных чисел n и m, для которых числа n^2+4m и m^2+5n являются квадратами.

Ответ: $(m,n)=(2,1),(22,9),(9,8)$.

Решение. Разберем два случая. Сначала предположим, что $m \leqslant n$. Тогда $n^2+4m \leqslant n^2+4n < (n+2)^2$. Следовательно, $n^2+4m=(n+1)^2$, откуда $4m=2n+1$, что невозможно из соображений четности.

Теперь предположим, что $n < m$. Тогда $m^2+5n < m^2+6m < (m+3)^2$, откуда либо $5n=2m+1$, либо $5n=4m+4$. Изучим каждый из этих подслучаев отдельно.

Если $5n=2m+1$, то $4m=10n-2$ и число $n^2+10n-2$ является квадратом. Это квадрат числа, большего n и меньшего $n+5$, той же четности, что и n. Следовательно, либо $n^2+10n-2=n^2+4n+4$, либо $n^2+10n-2=n^2+8n+16$. В итоге или $n=1$ и $m=2$, или $n=9$ и $m=22$.

Если же $5n=4m+4$, то $4m=5n-4$ и число n^2+5n-4 является квадратом. Это квадрат числа, большего n и меньшего $n+3$. Значит, либо $n^2+5n-4=n^2+2n+1$, либо $n^2+5n-4=n^2+4n+4$. Первое уравнение имеет нецелый корень, а второе дает $n=8$, откуда $m=9$.

Все полученные ответы подходят. □

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

2 б. Есть полный верный ответ.

Если верного ответа нет, но найдено хотя бы одно из решений, то по этому критерию ставится 1 балл вместо 2.

3 б. Верно рассмотрен случай $m \leqslant n$.

3 б. Верно рассмотрен случай $n \leqslant m$.

2 б. Ни один из указанных выше двух случаев верно не рассмотрен, но присутствует идея оценить выражение точным квадратом (например, $m^2+5n<(m+3)^2$ или $n^2+4m<(n+2)^2$).

Задача 8.3. Сколько существует прямых, проходящих через точку $(0,2019)$ и пересекающих параболу $y=x^2$ в двух точках с целыми координатами по оси y?

Ответ: 9.

Решение. Вертикальая прямая, очевидно, не подходит. Все прямые, отличные от вертикальной и проходящие через точку $(0, 2019)$, задаются уравнением $y = kx + 2019$ с некоторым k. Пусть такая прямая пересекает параболу в точках (a, a^2) и (b, b^2), причем a^2 и b^2 являются целыми числами. Без ограничения общности будет считать $a < b$. Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 = ka + 2019 \\ b^2 = kb + 2019. \end{cases}$$

Вычитая равенства друг из друга, получаем $a^2 - b^2 = k(a - b)$, и, поскольку $a \neq b$, заключаем, что $k = a + b$. Подстановкой полученного k в любое из уравнений системы приходим к соотношению $-ab = 2019$.

Заметим, что это равенство эквивалентно тому, что точки (a, a^2) и (b, b^2) лежат на одной прямой. В этом можно убедиться, подставив $k = a + b$ и $2019 = -ab$ в приведенную выше систему.

Возведя уравнение в квадрат, получаем $a^2b^2 = 2019^2$, причем a^2 и b^2 — целые неотрицательные числа (но a и b не обязательно целые!). Учитывая разложение $2019^2 = 3^2 \cdot 673^2$ на простые множители, мы имеем 9 вариантов разложения числа 2019^2 в произведение $a^2 \cdot b^2$ (с учетом порядка сомножителей). Так как a и b разных знаков, и $a < b$, то каждый такой вариант соответствует единственному решению $a = -\sqrt{a^2}$, $b = \sqrt{b^2}$ и, соответственно, одной искомой прямой.

Замечание. На схожей идее основана известная геометрическая конструкция — решето Матиясевича–Стечкина. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Получено уравнение, эквивалентное равенству $-ab = 2019$ из решения, но дальнейший подсчет числа прямых по какой-то причине произведен неправильно.

2 б. Получено уравнение, эквивалентное равенству $k = a + b$ из решения.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 8.4. Расстояния от точки P, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его вершин равны 3, 4 и 5. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $9 + \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$.

Решение. Обозначим вершины треугольника буквами A, B и C таким образом, что $PA = 3$, $PB = 4$ и $PC = 5$. Построим точку C_1 такую, что ACC_1 — равносторонний треугольник и отметим внутри него точку P_1 такую, что $P_1A = 3$, $P_1C = 4$ и $P_1C_1 = 5$ (рис. 1). Треугольники AP_1C и APB равны по трем сторонам, поэтому $\angle P_1AC = \angle PAB$. Следовательно, $\angle PAP_1 = 60°$, т. е. треугольник APP_1 равносторонний. (То же заключение можно получить, воспользовавшись поворотом вокруг точки A на $60°$.) В итоге имеем $PP_1 = 3$, $PC = 5$, $P_1C = 4$. Из этого по теореме Пифагора следует, что треугольник PP_1C прямоугольный с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5, и его площадь равна 6. Площадь равностороннего треугольника PP_1A со стороной 3 равна $9\sqrt{3}/4$. Следовательно, учитывая равенство треугольников APB и AP_1C, выводим

$$S_{APB} + S_{CPA} = S_{AP_1C} + S_{CPA} = S_{CPP_1} + S_{APP_1} = 6 + \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

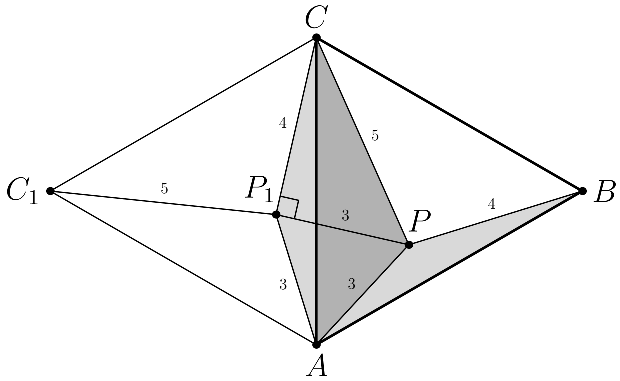

Рис. 1: к решению задачи 8.4

Аналогичными рассуждениями приходим к равенствам

$$S_{CPA} + S_{BPC} = 6 + \frac{25\sqrt{3}}{4}, \quad S_{BPC} + S_{APB} = 6 + \frac{16\sqrt{3}}{4}.$$

Складывая три полученных соотношения и деля пополам, получаем

$$S_{ABC} = 9 + \frac{25\sqrt{3}}{4}. \qquad \square$$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

4 б. Верно найдена любая из сумм площадей $S_{APB} + S_{CPA}$, $S_{CPA} + S_{BPC}$ или $S_{BPC} + S_{APB}$.

3 б. Верный алгоритм нахождения любой из указанных выше сумм площадей, но допущена арифметическая ошибка.

2 б. Приведен верный ответ.

Задача 8.5. На танцевальный вечер пришло n пар *партнеров,* каждая пара — это девушка и юноша. Вечер состоит из не менее чем n танцев, в каждом из которых участвуют все пришедшие. Изначально юноши рассаживаются за круглым столом. На первый танец каждая девушка приглашает одного из юношей (не обязательно своего партнера). После танца девушка проводит юношу, с которым она танцевала, к его месту за столом, и на следующий танец приглашает следующего за ним юношу против часовой стрелки.

Для каких n можно рассадить юношей за столом и указать пары для первого танца так, чтобы в каждом танце хотя бы одна девушка танцевала с партнером, с которым пришла на вечер?

Ответ: Для нечетных n.

Решение. Покажем, как выполнить условие для нечетных $n = 2k + 1$. Пронумеруем юношей за столом и соответствующих им девушек числами $1, 2, \ldots, n$. Пусть девушка с номером j на первый танец пригласит юношу с номером $2j$, если $j \leqslant k$, и с номером $2j - n$, если $k + 1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда первый танец девушка с номером n будет танцевать со своим партнером. Далее, несложно видеть, что j-ый танец девушка с номером $n - j + 1$ будет танцевать со своим партнером. Действительно, при $j \leqslant k + 1$ девушка с номером $n - j + 1$ первый танец танцует с юношей с номером $n - 2j + 2$, а j-ый танец с юношей с номером

$n-2j+2+(j-1)=n-j$, то есть со своим партнером. Если же $j \geqslant k+2$, то первый танец девушка с номером $n-j+1$ танцует с юношей с номером $2n-2j+2$, а j-ый с юношей с номером $2n-2j+2+(j-1)-n=n-j+1$, то есть опять же со своим партнером. Отметим, что вычитание n в последнем вычислении произошло из-за перехода от n-го юноши к первому.

Покажем, что для четных n выполнить условие задачи не получится. Пронумеруем юношей за столом $1, 2, \ldots, n$. Пусть в изначальной расстановке с юношей под номером j танцует девушка с номером a_j. Тогда, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо чтобы величины $a_j - j$ имели разные остатки при делении на n. Просуммируем числа $a_j - j$ по всем j от 1 до n. Заметим, что это сумма, с одной стороны, равна 0, а с другой стороны, при делении на n дает такой же остаток, как и сумма $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Однако при четных n это выражение не делится на n, что приводит к противоречию. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Показано, как выполнить условие для нечетного n.

3 б. Доказано, что для четного n нельзя выполнить условие.