11 класс

Задача 11.1. Петя и Вася участвовали в выборах на должность президента шахматного клуба. К полудню у Пети было 25% голосов, а у Васи — 45%. После полудня на голосование приходили только друзья Пети (и, соответственно, голосовали только за него). В итоге у Васи осталось только 27% голосов. Сколько процентов голосов набрал Петя?

Ответ: 55%.

Решение. Пусть x — количество проголосовавших до полудня, а y — количество проголосовавших после. Тогда за Васю проголосовало $0{,}45x$ человек, что составляет 27% от $x+y$. Таким образом, получаем равенство $0{,}45x = 0{,}27(x+y)$, откуда $2x = 3y$. Согласно условию, Петя набрал голосов $0{,}25x + y$, вычислим, какую долю от $x+y$ составляет это количество:

$$\frac{0{,}25x + y}{x+y} = \frac{0{,}25 + y/x}{1 + y/x} = \frac{1/4 + 2/3}{1 + 2/3} = \frac{11}{20} = 55\%\,. \qquad \square$$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

6 б. Верное в целом решение, но в ответе указана разница между искомой величиной и начальным процентом голосов у Пети.

5 б. Верное в остальном решение с неправильным ответом, полученным в результате арифметической ошибки.

1 б. Есть верный ответ.

Другие промежуточные продвижения в решении не оцениваются.

Задача 11.2. Найдите все такие пары натуральных чисел m и n, что $m^{2019} + n$ делится на mn.

Ответ: $m = 1$, $n = 1$ и $m = 2$, $n = 2^{2019}$.

Решение. Из условия следует, что $m^{2019} + n$ делится на m, следовательно, n делится на m. Обозначая $n = mn_1$, заключаем, что $m^{2018} + n_1$ делится на mn_1. Далее действуем по аналогии: выводим, что n_1 кратно m, вводим обозначение $mn_2 = n_1$ и приходим к тому, что $m^{2017} + n_2$ кратно mn_2. Продолжая таким образом, приходим к тому, что n представляется в виде km^{2019} с некоторым натуральным k. При этом условие задачи переписывается так: $(k+1)m^{2019}$ делится на km^{2020}, что возможно лишь при $k = 1$ и $m = 2$. $\square$

Критерии

7 б. Любое верное решение.

6 б. Приведено в целом верное решение, но указана только одна пара чисел.

2 б. Указаны оба ответа без решения, либо оно неверное.

1 б. Указан только один ответ без решения, либо оно неверное.

Задача 11.3. По кругу лежат 100 пирожков, из них 53 с капустой, а остальные — с рисом. Алексей знает, какие из них с чем, и хочет выбрать 67 подряд лежащих пирожков так, чтобы среди них было ровно k с капустой. При каких k ему это гарантированно удастся сделать независимо от расположения пирожков? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 35 или 36.

Решение. Набор из 67 пирожков, лежащих подряд, назовем отрезком. Два отрезка будем называть соседними, если наборы пирожков в них отличаются лишь парой крайних, то есть отрезки отличаются сдвигом на один пирожок. Тогда в двух соседних отрезках количества пирожков с капустой, очевидно, отличаются не более чем на 1. Следовательно, если в каких-то двух отрезках содержатся a и b пирожков с капустой, то для любого целого c между a и b найдется отрезок, содержащий ровно c пирожков.

Перейдем к решению задачи. Докажем, что найдется отрезок, содержащий хотя бы 36 пирожков с капустой и отрезок, содержащий не более 35. Для этого занумеруем пирожки числами от 1 до 100 так, чтобы 1-й пирожок был с рисом. Рассмотрим отрезки пирожков с номерами от 1-го до 67-го, от 68-го до 34-го (через 100-й), от 35-го до 1-го (через 100-й). В сумме эти три отрезка содержат все пирожки, кроме первого, по два раза, а первый — три раза. Таким образом, они в сумме содержат $2 \cdot 53 = 106$ пирожков с капустой, то есть в каком-то из трех отрезков содержится хотя бы 36 пирожков с капустой, а в каком-то — не более 35.

Учитывая вышесказанное, заключаем, что обязательно есть отрезок ровно с 35 пирожками и есть отрезок ровно с 36 пирожками.

Докажем, что других количеств может и не оказаться. Для этого расположим сначала 50 пирожков с рисом и 50 с капустой через один так, чтобы все пирожки с нечетными номерами были с рисом. В таком расположении каждый отрезок, начинающийся пирожком с рисом, содержит 33 пирожка с капустой, а начинающийся с пирожка с капустой содержит 34 пирожка с капустой. Осталось правильно заменить три пирожка с рисом на пирожки с капустой, чтобы все отрезки содержали 35 или 36 пирожков с капустой. Для этого достаточно заменить пирожки с номерами 1, 33 и 67. Тогда во всех отрезках кроме отрезка от 1-го до 67-го количество пирожков с капустой увеличится ровно на 2, а в отрезке от 1-го до 67-го увеличится на 3, что и даст требуемый результат. □

Критерии

Следующие критерии *суммируются:*

- 3 б. «Пример». Показано, что никакие k, кроме 35 и 36, не подходят.
- 4 б. «Оценка». Доказано, что $k = 35$ и $k = 36$ подходят. В отсутствие полного доказательства «оценки» *суммируются* следующие частичные продвижения:
  - 2 б. Доказано, что если есть отрезки с a и b пирожками, то есть и все промежуточные.
  - 1 б. Доказано, что есть отрезок с не менее чем 35 пирожками.
  - 1 б. Доказано, что есть отрезок с не более чем 36 пирожками.

Задача 11.4. Про положительные числа x и y известно, что

$$\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+x+y}=1\,.$$

Какие значения может принимать произведение xy? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что при каждом положительном y функция

$$f_y(x)=\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+x+y}$$

строго монотонно убывает на луче $(0;+\infty)$, поскольку знаменатели всех трех дробей возрастают. Следовательно, функция f_y принимает каждое значение не более одного раза. При этом нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} f_y(1/y) &= \frac{1}{1+1/y+1/y^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+1/y+y}= \\ &= \frac{y^2}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{y}{1+y+y^2}=1\,, \end{aligned}$$

откуда и заключаем, что $x=1/y$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Отмечена монотонность левой части по x или по y.

3 б. Доказано, что для любого y существует не более одного x, удовлетворяющего уравнению.

1 б. Есть правильный ответ.

Задача 11.5. Определите количество возможных значений произведения $a \cdot b$, где a, b — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$2019^2 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2020^2 .$$

Ответ: $C^2_{2\cdot 2019+2} + 2\cdot 2019 + 1 = 2\cdot 2019^2 + 5\cdot 2019 + 2 = 8\,162\,819$.

Решение. Предположим, что для каких-то двух различных пар $a \leqslant b$ и $a_1 \leqslant b_1$ из промежутка $[2019^2; 2020^2]$ выполнено равенство $ab = a_1 b_1$. Не умаляя общности, считаем, что $a_1 < a \leqslant b < b_1$. При фиксированном произведении сумма чисел тем меньше, чем они ближе друг к другу, поэтому $a + b < a_1 + b_1$. Обозначая $m = a_1 + b_1$ и $n = b_1 - a_1$, заключаем, что верна цепочка неравенств

$$m^2 - n^2 = 4a_1 b_1 = 4ab \leqslant (a+b)^2 \leqslant (a_1 + b_1 - 1)^2 \leqslant (m-1)^2 , \tag{1}$$

и, следовательно, $n^2 \geqslant 2m - 1 = 2n - 1 + 4a_1 \leqslant 2n - 1 + 4 \cdot 2019^2$. Полученное неравенство показывает, что $n - 1 \geqslant 2 \cdot 2019$, а это возможно, только если $a_1 = 2019^2$, $b_1 = 2020^2$. Кроме того, в соотношении (1) все неравенства должны обращаться в равенства. В частности, $a = b = 2019 \cdot 2020$.

В итоге заключаем, что равенство $ab = a_1 b_1$ возможно только в одном единственном случае. Всего пар различных чисел из промежутка $[2019^2; 2020^2]$ в точности $C^2_{2\cdot 2019+2}$. К ним для получения общего ответа надо прибавить пары совпадающих чисел, которых $2\cdot 2019+2$, и вычесть единицу. Получаем ответ

$$C^2_{2\cdot 2019+2} + 2\cdot 2019 + 1 = 2\cdot 2019^2 + 5\cdot 2019 + 2 = 8\,162\,819 . \qquad \square$$

Другое решение. Докажем, что равенство $ab = a_1 b_1$ возможно только в одном случае, другим способом. Без ограничения общности считаем $a < a_1 \leqslant b_1 < b$. Через (x, y) далее обозначаем наибольший общий делитель чисел x и y. Положим $u = (a, a_1)$, и определим $v = a/u$, $w = a_1/u$. Подставив $a = uv$ и $a_1 = uw$ в равенство, получим $uvb = uwb_1$, то есть

$$vb = wb_1 .$$

Поскольку v и w взаимно просты, b_1 делится на v.

Теперь заметим, что $(a_1 - a) \vdots u$ и $(b_1 - a) \vdots v$, откуда

$$(a_1 - a) \cdot (b_1 - a) \geqslant u \cdot v = a ,$$

из чего по неравенству о средних получаем

$$\frac{a_1 + b_1 - 2a}{2} \geqslant \sqrt{(a_1 - a)\cdot(b_1 - a)} \geqslant \sqrt{a} \geqslant 2019 ,$$

то есть

$$\frac{a_1 + b_1}{2} - a \geqslant 2019 . \tag{2}$$

Аналогично обозначив $s = (b, a_1)$, $t = b/s$, $r = a_1/s$, получаем

$$ta = rb_1 ,$$

откуда точно так же будет следовать, что $(b - b_1) \vdots t$ и $(b - a_1) \vdots s$, и

$$\frac{2b - a_1 - b_1}{2} \geqslant \sqrt{(b - a_1)\cdot(b - b_1)} \geqslant \sqrt{b} > 2019 ,$$

то есть
$$b - \frac{a_1 + b_1}{2} \geqslant 2020\,. \tag{3}$$
Складывая соотношения (2) и (3), выводим
$$b - a \geqslant 2019 + 2020 = 2020^2 - 2019^2\,.$$
Следовательно, $b = 2020^2$ и $a = 2019^2$, и все нестрогие неравенства выше должны обращаться в равенства. Неравенства о средних обратятся в равенство, только если члены равны, то есть $a_1 = b_1 = \sqrt{ab} = 2019 \cdot 2020$. □

Критерии

7 б. Приведено полностью правильное решение

2 б. Утверждается (без должного обоснования) единственность решения уравнения $ab = a_1 b_1$ с различными парами $a \leqslant b$ и $a_1 \leqslant b_1$ и получен правильный ответ.

1 б. Найдено только количество пар различных и совпадающих чисел из промежутка $[2019^2; 2020^2]$.

Снижаются баллы за следующий недочет в решении, которое в остальном верно:

–1 б. Допущены арифметические ошибки, не влияющие на ход решения.

Задача 11.6. В тетраэдре $ABCD$ выполнены равенства:

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD\,, \quad \angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC\,.$$

Докажите, что центр описанной сферы тетраэдра лежит на прямой, соединяющей середины ребер AB и CD.

Решение. Обозначим внешнюю биссекторную плоскость двугранного угла тетраэдра $ABCD$ при ребре AB за S_{AB}; аналогично для других ребер данного тетраэдра.

Лемма. Пусть в тетраэдре $ABCD$ выполнено равенство $\angle BAC+\angle BDC = \angle ABD+\angle ACD$. Тогда S_{AB}, S_{BD}, S_{AC}, S_{CD} параллельны одной прямой.

Доказательство леммы. Пусть $B'AC'$ — это образ треугольника BDC при параллельном переносе на вектор $\overline{DA}$, то есть точки B' и C' таковы, что $\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DA}$. Тогда угол $B'AC'$ равен углу BDC из равенства соответствующих треугольников. Кроме того, углы CAC' и ACD равны как накрест лежащие при $C'A \parallel CD$ и секущей AD. Аналогично равны BAB' и ABD. Тогда выполнено равенство $\angle BAC + \angle B'AC' = \angle BAB' + \angle CAC'$, которое является признаком того, что четырехгранный угол $ABCC'B'$ с вершиной A (обозначим его Ξ) описан вокруг некоторой сферы с центром I. Это означает, что биссекторные плоскости двугранных углов Ξ пересекаются по прямой AI.

Осталось заметить, что прямая AI искомая, так как биссекторные плоскости двугранных углов Ξ при ребрах AB и AC соответственно совпадают с S_{AB} и S_{AC}; а биссекторные плоскости двугранных углов Ξ при ребрах AC' и AB' соответственно параллельны S_{CD} и S_{BD} (они связаны параллельным переносом, упомянутым в начале доказательства). *Лемма доказана.*

Вернемся к исходной задаче. Лемму можно применить к обоим данным нам равенствам. Из первого равенства получается, что S_{AB}, S_{CD}, S_{AC}, S_{BC} параллельны одной прямой; а из второго — что S_{AB}, S_{CD}, S_{AD}, S_{BC} параллельны одной прямой. Но все шесть внешних биссекторных плоскостей не могут быть параллельны одной и той же прямой — это ясно хотя бы из того, что S_{AB}, S_{BC} и S_{AC} пересекаются в одной точке, центре вневписанной сферы тетраэдра.

Это означает, что прямая, параллельная первой четверке плоскостей, непараллельна прямой для второй четверки; а так как S_{AB} и S_{CD} параллельны обеим этим прямым, то эти плоскости параллельны друг другу.

Осталось показать, как из $S_{AB} \parallel S_{CD}$ следует требуемое. Обозначим через ℓ общий перпендикуляр к прямым AB и CD. Заметим, что он перпендикулярен и плоскостям S_{AB} и S_{CD}, так как они обе содержат или параллельны и AB и CD. Повернем тетраэдр на 180° вокруг оси ℓ. Легко видеть, что плоскость S_{AB} перейдет в себя, как и прямая AB, так как они перпендикулярны ℓ. Но тогда в себя перейдет и двугранный угол тетраэдра при ребре AB (плоскости ABC и ABD перейдут друг в друга), ведь двугранный угол однозначно задается своей внешней биссекторной плоскостью, ребром, и своей величиной, которая тоже при повороте сохраняется. Аналогично, при таком повороте в себя перейдет и двугранный угол при ребре CD (плоскости ACD и BCD перейдут друг в друга). Тогда и вершины A и B перейдут друг в друга, и C и D перейдут друг в друга; то есть прямая ℓ оказывается общим серединным перпендикуляром к ребрам AB и CD.

Кроме того, так как тетраэдр совместился с собой при повороте, то и его описанная сфера перешла в себя, откуда следует, что ℓ проходит через её центр. Следовательно, ℓ является искомой прямой. $\square$

Другое решение. Отметим для начала, что достаточно доказать равенства ребер $BC = AD$ и $AC = BD$. Действительно, они в силу равенства треугольников ABC и BAD гарантируют, что точки C и D равноудалены от плоскости α, являющейся серединным перпендикуляром к AB. В частности, плоскость α делит CD пополам. И наоборот, плоскость, являющаяся серединным перпендикуляром к CD, делит отрезок AB пополам. Следовательно, пересечение этих серединных перпендикуляров — прямая, проходящая через середины ребер и содержащая центр описанной сферы тетраэдра.

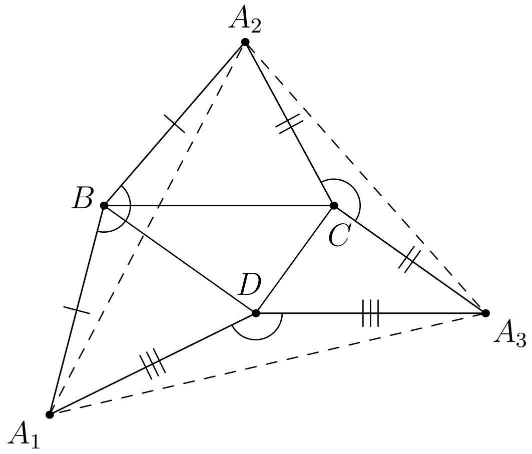

Рис. 1: к решению задачи 11.6

Обоснуем теперь равенство ребер. Для этого изобразим шестиугольную развертку $A_1BA_2CA_3D$ тетраэдра в плоскость BCD (рис. 1). Равенство

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD$$

для плоских углов тетраэдра при учете того, что сумма углов четырехугольника A_2BDC равна $360°$, означает, что сумма углов B и C шестиугольника равна $360°$. Таким образом, треугольники A_1BA_2 и A_3CA_2 равнобедренные и имеют одинаковый угол при вершине, то есть подобны; они переводятся друг в друга поворотной гомотетией с центром в точке A_2. Следовательно, $\triangle BA_2C \sim \triangle A_1A_2A_3$.

Аналогично, второе равенство из условия приводит к тому, что сумма углов B и D шестиугольника равна $360°$, откуда следует $\triangle A_1BD \sim \triangle A_1A_2A_3$. Принимая во внимание равенство $A_1B = BA_2$, заключаем равенство треугольников A_1BD и BA_2C, откуда вытекает $AD = A_1D = BC$ и $AC = A_1C = BD$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

4 б. Доказано, что утверждение задачи следует из пары равенств $AC = BD$ и $AD = BC$.

2 б. Показано, что из одного из равенств, данных в условии, следует описанность некоторого четырехгранного угла (или четырехугольника на сфере).

3 б. Обнаружение подобия $\triangle BA_2C \sim \triangle A_1A_2A_3$ на развертке или аналогичного ему.

2 б. Задача переформулирована в терминах развертки.

1 б. Идея рассмотреть развертку.