Олимпиада «Курчатов» - 2014
Финальный этап по физике

Задача 1. В невесомости грузик массой m подвесили на резинку жесткостью k и раскрутили с угловой скоростью ω. Найдите относительное удлинение резинки, а также отношение энергии упругой деформации к кинетической энергии груза.
Решение.
Пусть l — длина резинки в нерастянутом состоянии, а x — удлинение резинки. По второму закону Ньютона:

$$m\omega^2(l+x) = kx,$$

откуда относительное удлинение резинки:

$$\frac{x}{l} = \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2}.$$

Энергия упругой деформации: $E_1 = \frac{kx^2}{2}$, кинетическая энергия груза $E_2 = \frac{m\big(\omega(l+x)\big)^2}{2}$. Их отношение:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{k}{m\omega^2}\left(\frac{x}{l+x}\right)^2 = \frac{k}{m\omega^2}\left(\frac{1}{\frac{l}{x}+1}\right)^2 = \frac{k}{m\omega^2}\left(\frac{1}{\frac{k-m\omega^2}{m\omega^2}+1}\right)^2 = \frac{m\omega^2}{k}.$$

Следует отметить, что полученные ответы являются корректными только при выполнении требования $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$ – иначе пружина не остановит груз (особенно это важно указать для второго ответа, из структуры которого существование ограничения не следует с очевидностью).

Ответ: при $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$ относительное удлинение $\frac{x}{l} = \frac{m\omega^2}{k-m\omega^2}$, а отношение энергии упругой деформации к кинетической энергии груза $\frac{E_1}{E_2} = \frac{m\omega^2}{k}$; при $\omega \geq \sqrt{\frac{k}{m}}$ пружина не сможет удержать груз.

Задача 2. Однородный цилиндрический поплавок массой m и площадью сечения S плавает вертикально в стакане с водой. Поплавок слегка утопили, а затем отпустили, в результате чего поплавок начал колебаться. Найдите период этих колебаний. Плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.
Решение.
Пусть y — координата центра масс поплавка по оси $0y$, направленной вертикально вверх. За 0 возьмём координату центра масс поплавка, когда он находится в равновесии (сила тяжести равна силе Архимеда). Пусть в этом случае объём погруженной в воду части поплавка V_0. В общем случае объём погруженной части поплавка $V = V_0 - Sy$. Запишем для поплавка второй закон Ньютона:

$$ma_y = -mg + \rho gV = (-mg + \rho gV_0) - \rho gSy = -\rho gSy.$$

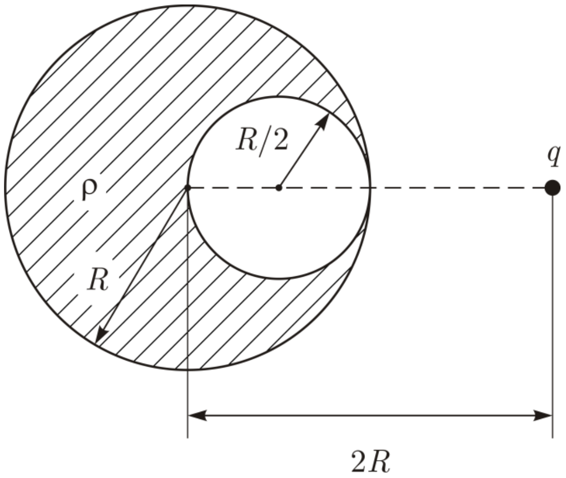
Это уравнение можно преобразовать к виду:

$$a_y = -\omega^2 y,$$

где введено обозначение $\omega = \sqrt{\frac{\rho gS}{m}}$. Мы получили уравнение гармонических колебаний с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$.

Задача 3. Цилиндрический сосуд длиной $L = 1{,}0$ м, расположенный горизонтально, разделён на две равные части подвижным массивным поршнем. По обе стороны от поршня находится идеальный газ при давлении p_0. Затем сосуд поставили вертикально, при этом поршень опустился на $h = 20$ см. Найдите давление p_0, если известна масса поршня $m = 10$ кг и его площадь $S = 10\ \text{см}^2$. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$. Температура окружающей среды постоянна.
Решение.
Пусть p_1 — давление газа под поршнем, p_2 — давление над поршнем. Поскольку поршень находится в равновесии $(p_1 - p_2)S = mg$. По закону Бойля-Мариотта: $p_0\frac{L}{2} = p_1\left(\frac{L}{2} - h\right) = p_2\left(\frac{L}{2} + h\right)$. Подставив эти уравнения в первое, получим: $\frac{mg}{S} = p_1 - p_2 = p_0\left(\frac{L}{L-2h} - \frac{L}{L+2h}\right) = p_0\frac{4Lh}{L^2-4h^2}$. Откуда $p_0 = \frac{mg}{S}\frac{L^2-4h^2}{4Lh} \approx 103$ кПа.
Ответ: $p_0 = \frac{mg}{S}\frac{L^2-4h^2}{4Lh} \approx 103$ кПа.

Задача 4. Найдите силу, с которой равномерно заряженный шар со сферической полостью будет действовать на поднесённый к нему точечный заряд q. Радиус шара R, полости — $R/2$ (см. рисунок). Объёмная плотность заряда шара — ρ. Точечный заряд находится на расстоянии $2R$ от центра шара, на оси, соединяющей центры шара и полости. Будет ли заряд притягиваться или отталкиваться?



Решение.
Удобно рассматривать не шар с полостью, а два шара: один с радиусом R и удельным зарядом ρ и другой с радиусом $R/2$ и удельным зарядом $-\rho$ (на месте полости). Как известно, равномерно заряженный шар создаёт в окружающем пространстве электрическое поле эквивалентное полю точечного заряда, помещённого в центр шара. Поэтому первый шар будет действовать на точечный заряд силой $F_1 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\rho\frac{4}{3}\pi R^3 q/(2R)^2 = \frac{\rho q R}{12\varepsilon_0}$ (за положительное выбрано направление от шара), а второй шар с силой $F_2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)(-\rho)\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 q/\left(\frac{3}{2}R\right)^2 = -\frac{\rho q R}{54\varepsilon_0}$. Полная сила, действующая на заряд $F = F_1 + F_2 = \frac{7}{108}\frac{\rho q R}{\varepsilon_0}$, является силой отталкивания, если знаки ρ и q совпадают, и силой притяжения в противном случае.

Задача 5. Газоразрядная лампа, вольт-амперная характеристика которой (зависимость тока, текущего через лампу, от напряжения на ней) задана уравнением $I = kU^2$ подключена последовательно с резистором сопротивлением R к источнику постоянного напряжения U. Если подключить неидеальный вольтметр к лампе, то он покажет напряжение V_1, а если к резистору — V_2. Найдите коэффициент k.

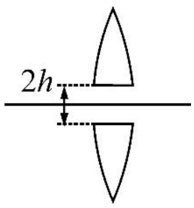
Решение.
В первом случае на лампе падает напряжение V_1, значит, на резисторе — $U - V_1$. Полный ток в цепи $(U - V_1)/R$, ток через лампу kV_1^2. Ток, текущий через вольтметр, $I_{V1} = \frac{U - V_1}{R} - kV_1^2$. Во втором случае на резисторе падает напряжение V_2, значит, на лампе — $U - V_2$. Ток в цепи равен току через лампу, то есть $k(U - V_2)^2$, через резистор течёт ток V_2/R, значит, через вольтметр $I_{V2} = k(U - V_2)^2 - \frac{V_2}{R}$. Поскольку внутреннее сопротивление вольтметра постоянно $\frac{I_{V1}}{I_{V2}} = \frac{V_1}{V_2}$. Откуда:

$$\left(\frac{U - V_1}{R} - kV_1^2\right)V_2 = \left(k(U - V_2)^2 - \frac{V_2}{R}\right)V_1.$$

Из этого уравнения несложно выразить k:

$$k = \frac{UV_2}{RV_1(V_1V_2 + (U - V_2)^2)}.$$

Задача 6. Из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием f = 15 см вырезали центральную часть шириной $2h$ = 2 мм (см. рис.), а затем симметрично сдвинули оставшиеся части до соприкосновения, изготовив так называемую «билинзу Бийе». Точечный источник света с длиной волны λ = 711 нм поместили на расстоянии a = 20 см от билинзы на ее оси симметрии.



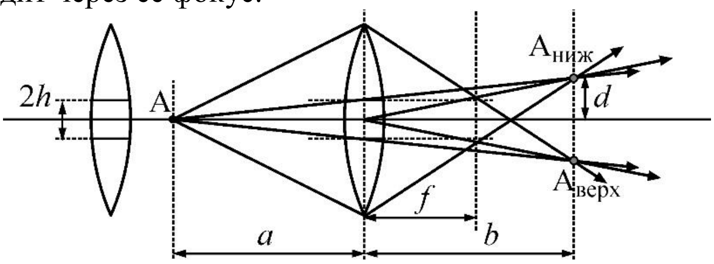
(1) Где находятся изображения, даваемые билинзой? Сделайте построение хода лучей и определите расстояния от изображений до линзы и до ее оси.

(2) Каков будет период интерференционных полос в центре экрана, поставленного в фокальной плоскости билинзы? Угол φ схождения интерферирующих лучей на экране можно считать малым, так что $\sin\varphi \approx \varphi$.

(3) Оцените число N интерференционных полос, наблюдаемых на этом экране.

Решение

(1) Если удалить у линзы ее часть, то оставшаяся часть по-прежнему будет формировать изображение, однако его яркость изменится. Поэтому можно рассматривать билинзу как две тонкие линзы, главные оптические оси которых параллельны и сдвинуты на расстояние h относительно оси системы. На рисунке показано построение хода лучей от источника А через каждую из половинок билинзы до двух изображений – верхнего ($А_{ниж}$), полученного в результате преломления света в нижней части билинзы, и нижнего ($А_{верх}$), полученного в результате преломления света в верхней части билинзы. Для этого использованы правила построения изображений в тонкой линзе: луч (фиктивный), идущий через оптический центр линзы (реально отсутствующий), не преломляется, а луч, идущий вдоль оси симметрии системы параллельно главной оптической оси линзы, после преломления проходит через ее фокус.



Из подобия треугольников на рисунке следует, что расстояние d от каждого изображения до оси системы можно найти из пропорции: $\frac{d}{h} = \frac{a+b}{a}$, откуда $d = h \cdot \frac{a+b}{a}$.

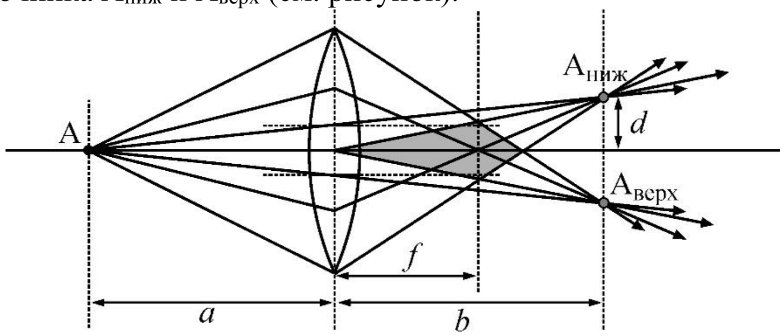
В соответствии с формулой тонкой линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$, где b – расстояние от билинзы до плоскости двух изображений, откуда $b=\frac{af}{a-f}=\frac{20\cdot 15}{20-15}=60\text{ см}>0$, то есть изображения действительные и находятся справа от линзы.

Расстояние d от каждого изображения до оси системы, таким образом, равно

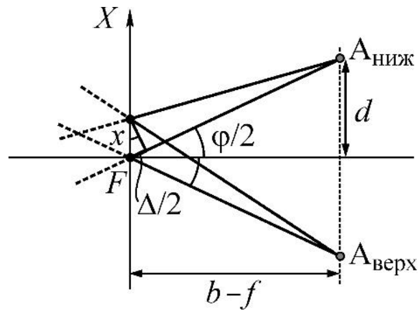
$$d=h\cdot\frac{a+b}{a}=h\cdot\frac{a}{a-f}=1\cdot\frac{20}{20-15}=4\text{ мм}.$$

Ответ (1): $b=\frac{af}{a-f}=60\text{ см}$, $d=h\cdot\frac{a}{a-f}=4\text{ мм}$ (см. рис.).

(2) Билинза позволяет «раздвоить» точечный источник А, получив два точечных когерентных источника $А_{ниж}$ и $А_{верх}$ (см. рисунок).



Интерференцию можно наблюдать только в области перекрытия пучков света, полученных в результате его преломления в верхней и нижней частях билинзы – эта область на рисунке заштрихована. В силу обратимости световых пучков, проходящих через верхнюю и нижнюю части билинзы, можно рассматривать интерференционную картину в фокальной плоскости билинзы, как результат наложения двух пучков света, выходящих из точечных источников $А_{ниж}$ и $А_{верх}$ обратно, в направлении билинзы.



Найдем разность хода Δ лучей от этих источников в фокальной плоскости билинзы вблизи оси симметрии системы в зависимости от расстояния x точки в этой плоскости до точки F на этой оси (см. рисунок). В центре интерференционной картины разность хода, очевидно, равна нулю, и наблюдается интерференционный максимум. При отклонении от центра картины на расстояние x один луч укорачивается, а другой удлиняется на величину $\frac{\Delta}{2}\approx x\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\approx x\cdot\frac{\varphi}{2}$, как следует из построения. Таким образом, $\Delta\approx x\cdot\varphi$.

При этом $\frac{\varphi}{2}\approx\frac{d}{b-f}$, где, согласно пункту (1) решения данной задачи, $b=\frac{af}{a-f}$, $b-f=\frac{f^2}{a-f}$, а $d=h\cdot\frac{a}{a-f}$, так что $\varphi\approx\frac{2ha}{f^2}$.

Максимумы в интерференционной картине наблюдаются там, где разность хода интерферирующих лучей $\Delta=m\lambda$, m – целое. Период Δx интерференционных полос вблизи центра экрана определяется минимальным расстоянием по оси x вдоль экрана, при котором разность хода Δ интерферирующих лучей меняется на величину λ: $\Delta\approx\Delta x\cdot\varphi=\lambda$, откуда

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda f^2}{2ha} = \frac{7{,}11\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}15^2}{0{,}002\cdot 0{,}2} \approx 4{,}00\cdot 10^{-5}\ \text{м} = 40{,}0\ \text{мкм}\ .$$

Существует другой способ решения: если заметить, что разность хода лучей от двух изображений источника, приходящих в точку x на экране $\Delta(x) = \sqrt{(b-f)^2+(d+x)^2} - \sqrt{(b-f)^2+(d-x)^2}$, и что условие малости φ эквивалентно условию $|d \pm x| << b-f$. Значит:

$$\Delta(x) \approx (b-f)\left[1+\frac{(d+x)^2}{2(b-f)^2} - 1 - \frac{(d-x)^2}{2(b-f)^2}\right] = \frac{2d}{b-f}x = \frac{2ah}{f^2}x\,,$$

и условие наблюдения максимумов $\Delta(x_m) = m\cdot\pi$ дает $x_m = m\dfrac{f^2\lambda}{2ah}$. Отсюда легко находится ширина полосы.

Ответ (2): $\Delta x \approx \dfrac{\lambda f^2}{2ha} \approx 40{,}0\ \text{мкм}$.

(3) Наиболее широкая интерференционная картина будет получаться, очевидно, в фокальной плоскости билинзы, где эта картина будет иметь ширину $2h$ = 2 мм.

В центре интерференционной картины разность хода равна нулю, и наблюдается интерференционный максимум, а следующие максимумы удалены от него на расстояние $\Delta x = \dfrac{\lambda f^2}{2ha} \approx 4{,}00\cdot 10^{-5}\ \text{м} = 40{,}0\ \text{мкм}$. На всей ширине $2h$ интерференционной картины в фокальной плоскости билинзы уложится, таким образом, $\dfrac{2h}{\Delta x} = \dfrac{2000}{40} = 50$ периодов этой картины – по 25 слева и справа от ее центра. Всего будет наблюдаться, считая центральный максимум, $N = \dfrac{2h}{\Delta x} + 1 = \dfrac{4h^2a}{\lambda f^2} + 1 = 51$ интерференционная полоса.

Ответ (3): $N = \dfrac{2h}{\Delta x} + 1 = \dfrac{4h^2a}{\lambda f^2} + 1 = 51$.